

基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法

覃灏¹, 李军华^{1†}

(1. 南昌航空大学江西省图像处理与模式识别重点实验室, 江西 南昌 330063)

摘要: 研究表明一般的高维多目标进化算法无法有效处理不同类型的 Pareto 前沿。针对上述情况, 本文提出了一种基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法 (Many-objective evolutionary algorithm based on population association strategy and enhanced solution set criterion, MaOEA/PAS-ESC)。该算法在环境选择中采用种群关联策略 (Population association strategy, PAS) 和强化解集准则 (Enhanced solution set criterion, ESC) 协同指导种群进化。其中, PAS 利用解与参考向量的角度和欧氏距离以及种群中解之间的距离构建角度与距离联合函数 (Joint Function of Angle and Distance, JFAD), 选择多样性良好的解, 然后, ESC 利用参考点与种群间的联系组成适应度函数, 选择收敛性良好的解, 以共同达到有效平衡多样性和收敛性的目的。实验结果证明 MaOEA/PAS-ESC 在处理高维多目标优化问题不仅具有更强的竞争性能, 而且提高了处理不同类型 Pareto 前沿的能力。

关键词: 高维多目标进化算法; 种群关联策略; 强化解集准则; 种群进化; 角度与距离联合函数; 适应度函数

中图分类号: TP18

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0131

开放科学 (资源服务) 标识码 (OSID):



Many-objective Evolutionary Algorithm based on Population Association Strategy and Enhanced Solution Set Criterion

QIN Hao¹, LI Jun-hua^{1†}

(1. Key Laboratory of Jiangxi Province for Image Processing and Pattern Recognition, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

Abstract: Research shows that the general many-objective evolutionary algorithm can not effectively deal with different types of Pareto fronts. In view of the above situation, this paper proposes a many-objective evolutionary algorithm based on Population Association strategy and enhanced solution set criterion (MaOEA/PAS-ESC). In this algorithm, population association strategy (PAS) and enhanced solution set criterion (ESC) are used to guide the population evolution. PAS uses the angle and Euclidean distance between the solution and the reference vector as well as the distance between the solutions in the population to construct the joint function of angle and distance (JFAD) and select the solution with good diversity. Then, ESC uses the connection between the reference point and the population to form the fitness function and select the solution with good convergence. In order to balance diversity and convergence effectively. The experimental results show that MaOEA/PAS-ESC not only has stronger competitive performance in dealing with many-objective optimization problems, but also improves the ability to deal with different types of Pareto fronts.

Keywords: Many-objective evolutionary algorithm; Population association strategy; Enhanced solution set criterion; Population evolution; Joint Function of Angle and Distance; Fitness function

0 引言

多目标优化问题 (Multi-objective Optimization Problems, MOPs^[1]) 的各目标之间大多具有冲突

关系。目标数在四个及以上的多目标优化问题为高维多目标优化问题 (Many-objective optimization problems, MaOPs^[2])。

收稿日期: 2021-01-22; 修回日期: 2021-07-19。

基金项目: 国家自然科学基金 (No.62066031, No.61866025, No.61866026); 江西省自然科学基金 (No.2018BAB202025); 江西省优势科技创新团队计划 (No.2018BCB24008); 基于自适应参考点策略和降维技术的高维多目标进化优化研究 (YC2020030)

[†]通讯作者. E-mail: jhlee126@126.com.

近年来,研究者们在高维多目标进化算法研究领域相继提出了大量进化算法,大致可分为以下几类:

1) 基于性能指标的算法,这类算法根据相关指标,筛选性能优越的解。目前,相关文献提出了大量评价指标,比如 $I_{\varepsilon+}$ 指标^[3]、纯粹多样性 (PD^[4])、反世代距离 (IGD^[5])、超体积 (HV^[6])、以及 R2^[7] 等。

2) 基于分解的算法,这类算法使用一组均匀分布的权重向量,将高维多目标优化问题分解为一系列标量目标子问题或便于管理的多目标优化问题。

3) 基于松弛 Pareto 支配的方法,当目标数增多时,通过增大支配区域,能快速识别临近 PF 的解。相关方法很多,例如: GrEA^[8]、SDR 支配^[9]、RP 支配^[10]、角度支配^[11]和 D 支配^[12]等。

除以上三种分类,还有一些经典的 MaOEAs 不属于这三类。例如,基于转移的密度估计 (SDE^[13]),增强 Pareto 进化算法 (SPEA^[14]),偏好激励协同进化算法 (PICEA-g^[15]), SetEA^[16] 等。

大量的 MaOEAs 在处理 MaOPs 方面表现出较好的性能,但相关研究 [17],[18] 表明,这些算法依赖 PF 形状,在各种不同的 PF 上普适性不佳。为解决上述问题,我们提出一种基于种群关联策略和强化解集准则的高维多目标进化算法 (MaOEA/PAS-ESC)。该算法的主要创新如下:

(1) 为选择多样性良好的个体,采用参考向量分解种群,利用参考向量与解的距离和角度值以及各解之间距离组成联合函数以提高解的多样性和分布性。

(2) 为选择收敛性良好的个体,根据每个解与对应参考点的欧氏距离、非贡献解与其相关联参考点的角度组成适应度函数。欧氏距离增强解的收敛性,角度提供解的分布性。

1 相关工作

1.1 基于指标的 MOEAs

近年来,相关文献中提出了许多评价指标,这些指标作用各异。世代距离 (GD^[19]) 衡量收敛性,纯粹多样性 (PD^[4]) 衡量多样性,反世代距离 (IGD^[5])、超体积 (HV^[6]) 和增强型反世代距离 (IGD-NS^[20]) 等同时衡量收敛性和多样性。这些指标在多目标进化算法中应用广泛。

典型的基于评价指标的多目标进化算法包括 MaOEA/IGD^[21]、SMS-EMOA^[22]、AR-MOEA^[20]、MOMBI-II^[23]、TS-R2EA^[24]、R2-IBEA^[25] 和 HypE^[26]]

等。MaOEA/IGD 的环境选择采用 IGD 指标作为选择标准。由于高维空间较大,计算量增大,很难识别出最邻近个体。SMS-EMOA^[22] 是基于 HV 指标的 MOEAs。通过对比实验,可以发现 SMS-EMOA 能有效处理低维情况,但面对高维,计算复杂度急剧增加。AR-MOEA 采用 IGD-NS 指标,创建参考点自适应方法调整参考点以应对不同形状 PF。实验表明,AR-MOEA 在规则和不规则 PF 问题上均性能良好。HypE 是一种基于快速 HV 的进化算法。采用了蒙特卡罗模拟估计近似 HV 值,提高计算效率。

1.2 基于分解的 MOEAs

基于分解的 MOEAs 也存在许多经典的算法,例如 NSGA-III^[27]、RVEA^[28]、MOEA/D-LWS^[29]、ARVEA^[30] 和 SPEA/R^[31]、并行优化^[32] 等。SPEA/R 中采用基于参考向量的密度估计方法、适应度分配方法和新的环境选择策略。在 SPEA/R 中使用将两个种群合并后归一化的方法处理目标尺度不一致的问题。

巩敦卫^[32] 等人提出的基于目标分解的高维多目标并行进化优化方法,在并行环境下求解优化问题。采用新的保存集形成策略,降低问题求解难度,保证 Pareto 最优集的逼近和分布性能。RVEA 使用一组均匀分布的参考向量分解目标空间,使候选解能够收敛到每个目标子空间的最优情况。

2 基于 PAS 和 ESC 的高维多目标进化算法

MaOEA/PAS-ESC 采用种群关联策略和强化解集准则。首先,基于种群关联策略,利用参考向量将组合种群划分为多个子种群,利用解与参考向量之间的角度和种群中解之间的距离选择多样性良好的解;然后,采用强化解集准则,利用参考点与淘汰解之间的联系选择收敛性良好的解。

算法 1 给出了 MaOEA/PAS-ESC 算法的伪代码。MaOEA/PAS-ESC 的主要框架包含下列步骤:首先,随机生成一个大小为 N 的初始种群 P_0 和一组均匀分布的参考向量 V 和参考点集 R ;然后,采用二元竞争策略构建一个交配池 P'_t ;随后,执行交叉、变异;最后,在环境选择根据候选解的 PAS 和 ESC 对种群 P_t 中候选解进行排序,选择 N 个解进入下一代种群。

算法 1: MaOEA/PAS-ESC

输入: N (种群规模), N_R (参考点和存档数目)

输出: P (最终种群)

```

1  $P_0 = \text{RandomPopulation}(N);$ 
2  $V = \text{UniformPoint}(N_R);$ 
3  $R = \text{UniformReference Point}(V);$ 
4  $A = P;$ 
5  $R' = R;$ 
6 while  $t < t_{max}$  do
7    $P'_t = \text{MatingSelection}(P_t, R');$ 
8    $Q_t = \text{Variation}(P'_t, N);$ 
9    $[A_t, R'] = \text{RefPointAdaption}(A_t \cup Q_t, R, P_t);$ 
10   $P_{t+1} = \text{EnvironmentalSelection}(P_t \cup Q_t, R', V);$ 
11 end while
```

2.1 环境选择

如算法 2 所示, 首先使用 PAS 分解种群, 获得 $P_{t+1,1}$; 计算 $P_{t+1,1}$ 中解的数目, 如果没有达到种群规模, 则在 PAS 淘汰解集 \bar{P}_t 中采用 ESC, 通过计算解与参考点间的欧氏距离和夹角筛选 $P_{t+1,2}$; 最后, 合并 $P_{t+1,1}$ 和 $P_{t+1,2}$ 为 P_{t+1} . 一般而言, $P_{t+1,1}$ 无法满足种群规模, 利用 ESC 保留收敛性和多样性良好的解以达到种群规模.

算法 2: 环境选择

输入: P_t (组合种群), R' (自适应参考点), V (参考向量), N (种群大小)

输出: P_{t+1} (下一代种群)

```

1 /*PAS*/;
2  $P_{t+1,1} = \text{PAS}(P_t, V);$ 
3  $K = N - |P_{t+1,1}|;$ 
4 if  $K > 0$  then
5    $\bar{P}_t = P_t - P_{t+1,1};$ 
6   /*ESC*/;
7    $P_{t+1,2} = \text{ESC}(\bar{P}_t, R', K);$ 
8    $P_{t+1} = P_{t+1,1} \cup P_{t+1,2};$ 
9 else
10   $P_{t+1} = P_{t+1,1};$ 
11 end if
```

2.1.1 PAS 算法

PAS 基于参考向量筛选解. 其过程如算法 3 所示. 首先, 归一化种群目标值, 得到归一化目标值 $f'_{t,i}(p)$. 接着, 计算种群中每个解与其他解之间的欧氏距离 $dis_{t,i}$, 归一化欧氏距离 $Dis_{t,i}$. 然后, 根据每个解与参考向量间的夹角分解组合种群 P_t 为一组子种群. 最后, 利用获得的角度、欧氏距离计算角度与

距离联合函数 (Joint Function of Angle and Distance, JFAD), 在每个子种群中进行精英选择.

算法 3: PAS 算法

输入: P_t (种群), V (参考向量)

输出: $P_{t+1,1}$ (PAS 选择解集)

```

1 /* 归一化 */;
2 for  $i = 1$  to  $M$  do
3   计算理想点:  $z_i^{\min} = \min_{p \in P_t} f_{t,i}(p);$ 
4   计算最差点:  $z_i^{\max} = \max_{p \in P_t} f_{t,i}(p);$ 
5 end for
6  $f'_{t,i}(p) = \frac{f_{t,i}(p) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}};$ 
7 /* 种群间距 */;
8 for  $i = 1$  to  $N$  do
9    $dis_{t,i} = pdist2(p, P_t);$ 
10 end for
11  $Dist_{t,i} = \frac{\min(dis_{t,i})}{\max(dis)};$ 
12 /* 分解种群 */;
13 for  $i = 1$  to  $N$  do
14    $\theta_{t,i} = \arccos \frac{f'_{t,i}(p) \cdot v_i}{\|f'_{t,i}(p)\|};$ 
15 end for
16 /* 精英选择 */;
17 去重复排序:  $A = \text{unique}(\theta_t);$ 
18 for  $i = 1$  to do
19   /* 角度与距离联合函数 (JFAD) */;
20    $JFAD_{t,i} = \alpha \cdot \left(1 + M \cdot \frac{\theta_{t,i}}{\theta_v^{\min}}\right) \|f'_{t,i}(p)\| +$ 
     $\beta \cdot Dis_{t,i};$ 
21 end for
22 确定对应解:  $P_{t+1,1} = \min(JFAD_t);$ 
```

算法 3 中 JFAD 计算公式如下所示:

$$JFAD_{t,i} = \alpha \cdot DCA(\theta_{t,i}, p) + \beta \cdot Dis_{t,i} \quad (1)$$

$$\alpha + \beta = 1$$

其中, $DCA(\theta_{t,i}, p)$ 表示解与参考点的距离, $Dis_{t,i}$ 为解之间的最小归一化欧氏距离. α 和 β 是权值.

$DCA(\theta_{t,i}, p)$ 的数学表达式如下:

$$DCA(\theta_{t,i}, p) = \left(1 + M \cdot \frac{\min(\theta_{t,i})}{\min(\theta)}\right) \|f'_{t,i}(p)\| \quad (2)$$

其中, M 为目标数, $\min(\theta_{t,i})$ 为第 i 个解与参考向量的最小夹角, $\min(\theta)$ 为参考向量 v_i 与其他参考向量的最小角度, $\|f'_{t,i}(p)\|$ 为第 i 个解的归一化范数.

通过 JFAD 同时衡量解的收敛性和多样性. 第一, 利用解与参考向量的角度 $\theta_{t,i}$, 为 JFAD 在多样性方面提供计量方式, 筛选多样性更加优良的解; 第二, 解之间的欧氏距离 $Dis_{t,i}$ 则能加强解的收敛性. 解的 JFAD 越小, 表明解的收敛性和多样性越好, 各子种群中 JFAD 最小的解将被选择进入解集 $P_{t+1,1}$, 与解集组合成为下一代种群.

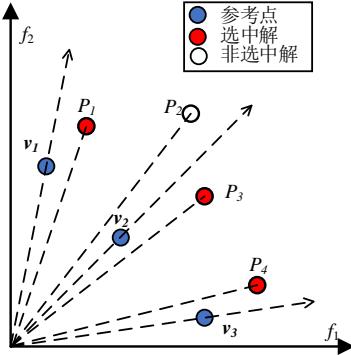


图 1 PAS 示意图

PAS 的优势如图 1 所示, 其中 v_1 、 v_2 、 v_3 为参考向量, p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 为种群中的解, p_1 与 v_1 关联, p_2 和 p_3 与 v_2 关联, p_4 与 v_3 关联。在参考向量 v_2 所在子种群中存在两个解 p_2 和 p_3 , 计算获得 p_3 的 JFAD 值明显低于 p_2 , 故选择 $\{p_1, p_3, p_4\}$ 。

2.1.2 ESC 算法

由于 PAS 筛选的解的数目无法达到种群规模, 则需要 ESC 排序, 在剩余解中筛选出性能优良的解, 以满足种群规模。相关过程如算法 4 所示。首先, 将 \bar{P}_t 非支配排序, 划分为多个非支配层, 获得 \bar{P}_t , 计算解与参考点之间的欧氏距离和夹角; 然后, 取前 $k - 1$ 层加入 $P_{t+1,2}$ 中, 其中 $k - 1$ 层非支配解数目少于 K 值; 接着, 计算第 k 层的 fitness 值, 删除 fitness 值最小的解, 每次删除一个候选解后, 重新计算适应度值, 重复上述过程, 直到解的数目等于 K ; 最后, 返回 $P_{t+1,2}$ 。

算法 4: ESC 排序

输入: \bar{P}_t (PAS 淘汰的解), R'
(自适应参考点), K (ESC 需获得的解的数目)

输出: $P_{t+1,2}$ (ESC 选择解集)

```

1 /* 计算解与参考点间距和角度 */;
2  $Front_t = \text{NondominatedSort}(\bar{P}_t)$  ;
3 获取非支配解集  $\bar{P}_t = Front_t$ ;
4  $\{dist_t, \theta_t\} = \text{CalDistance}(\bar{P}_t, R')$ 
5 /* 选中前  $k - 1$  层解 */;
6  $k$  取满足  $\left| \bigcup_{i=1}^k Front_{t,i} \right| \geq K$  的最小值;
7  $P_{t+1,2} = \bigcup_{i=1}^{k-1} Front_{t,i}$  ;
8 /* 适应度选择 */;
9 While  $|Front_{t,k}| > K - |P_{t+1,2}|$  do
10    $fitness_t = ESC(Front_{t,k} \setminus \{p\}, R', \theta_t)$  ;
11    $p = \min(fitness_t)$  ;
12    $P_{t+1,2} = P_{t+1,2} \cup \{p\}$  ;
13 end While
```

算法 4 第 10 行的适应度函数由贡献解和非贡献解两部分组成:

$$fitness_t = CS(p, R') + NCS(p, R') \quad (3)$$

其中, p 表示在第 k 层非支配层中的非支配解, R' 表示自适应参考点, $CS(p, R')$ 表示解 p 的贡献解部分, $NCS(p, R')$ 表示解 p 的非贡献解部分。在计算解 p 的适应度值时, 先将解 p 从种群中删除, 然后重新判别贡献解和非贡献解, 计算 $CS(p, R')$ 和 $NCS(p, R')$ 组成解 p 的适应度值。具体的贡献解和非贡献解相关的计算公式如下所示:

$$CS(p, R') = \sum_{r \in R'} \min_{p \in P_{t,k}} dis(r, p) \quad (4)$$

和

$$\begin{aligned} NCS(p, R') = & \sum_{p' \in P_{t,k}^*} [a \cdot \min_{r \in R'} dis(r, p')] \\ & + b \cdot \theta_{r \in R'}(r, p')] \end{aligned} \quad (5)$$

$$a + b = 1$$

其中, $P_{t,k}$ 表示在第 k 层非支配层的一组非支配解, $P_{t,k}^*$ 表示 $P_{t,k}$ 中的非贡献解, $dis(r, p)$ 表示目标空间中 r 和 p 之间的欧氏距离。 a 和 b 表示在非贡献解相关计算中欧氏距离和角度的权值分配。

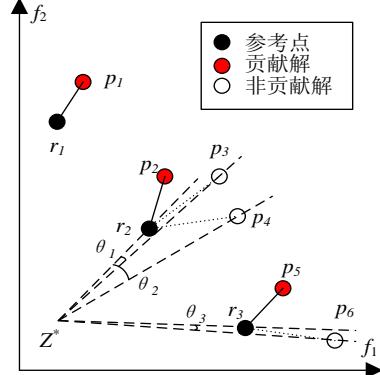


图 2 ESC 示意图

图 2 为 ESC 关于解集中优良解的筛选机制。其中 r_1 、 r_2 、 r_3 为参考点, p_1 、 p_2 和 p_5 为贡献解, p_3 、 p_4 、 p_6 为非贡献解。 z^* 为理想点。当需要在这 6 个候选解中选择 5 个质量最佳的解填充到下一代中时, ESC 可以区分最佳解集 $\{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$ 。

3 实验仿真及分析

将 MaOEA/PAS-ESC 算法与 NSGA-II/SDR^[33]、RVEA^[28]、NSGA-III^[27]、MOEA/D-AWA^[34] 和 MOMBII-II^[23] 进行比较, 采用 DTLZ^[35] 测试集、WFG^[36] 测试集和 MaF^[37] 测试集。使用多目标进化算法平台 PlatEMO^[38] 对比实验。接下来介绍相关设置并将各算法在测试集的实验结果对比分析。

3.1 实验设置

1) 基准测试问题: 本文采用测试问题 DTLZ1-DTLZ7、WFG1-WFG9 和 MaF1-MaF13。可任意扩展这些测试问题的目标数, 在目标数为 8、15、20 的测试问题上进行对比实验。

2) 种群规模: 6 种算法的种群规模与参考点的数量相关。详细参数见表 1。

表 1 种群规模

目标数 (M)	系数 (P_1, P_2)	种群规模 (N)
8	(3, 2)	156
15	(2, 1)	135
20	(2, 1)	230

3) 运行代数: 最大运行代数均设置为 500。

4) 评价指标: 使用反世代距离 (IGD^[5]) 和超体

积 (HV^[6]) 分别度量算法的收敛性和多样性。

5) 算法参数设置: 在 MaOEA/PAS-ESC 算法中, 经过多次实验对比, PAS 中 JFAD 权值设置为 $\alpha=0.73$, $\beta=0.27$, ESC 中的非贡献解中关于欧氏距离和角度的权重比例分别设置为 $a = 0.34, b = 0.66$ 。

6) 统计方法: 在每个测试问题上, 每个算法都进行 30 次独立运行, 并且在实验结果的基础上采用 Wilcoxon 秩和检验方法进行分析比较。实验结果用均值表述。

3.2 算法在 DTLZ1-DTLZ7 的对比分析

本节中给出了 6 个算法在 DTLZ 测试集上的实验结果, 表 2 和表 3 分别展示了对比算法的 IGD 值和 HV 值的均值, 实验结果为蓝色, 表示算法获得最佳结果。

表 2 NSGA-II/SDR、RVEA、NSGA-III、MOEA/D-AWA、MOMBI-II 和 MaOEA/PAS-ESC 在 DTLZ1 DTLZ7 上获得的 8、15、20 目标 IGD 值的统计结果

Problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
DTLZ1	8	1.6531e-1 -	9.7068e-2 +	1.0590e-1+	1.1043e-1=	2.0323e-1-	1.0858e-1
	15	1.9428e-1 -	1.5900e-1 +	2.2835e-1 -	1.8709e-1 -	2.8441e-1 -	1.7001e-1
	20	2.2603e-1 =	1.7345e-1 +	2.5161e-1 =	2.4867e-1 -	3.0998e-1 -	2.2076e-1
DTLZ2	8	5.2064e-1 -	3.1551e-1 +	3.2836e-1 -	3.4856e-1 -	3.2822e-1 -	3.2253e-1
	15	7.3715e-1 -	6.2663e-1 +	6.4281e-1 -	7.2569e-1 -	8.5938e-1 -	6.2838e-1
	20	6.4654e-1 -	6.2367e-1 -	7.8407e-1 -	8.3247e-1 -	9.1642e-1 -	6.2227e-1
DTLZ3	8	3.9362e-1 -	3.3192e-1 +	1.8486e+0 -	5.0994e-1 -	4.4532e-1 =	3.7611e-1
	15	7.0574e-1 -	9.9732e-1 -	5.5615e+0 -	8.7585e-1 -	1.1034e+0 -	6.3644e-1
	20	6.8367e-1 -	6.3734e-1 =	7.4186e+1 -	9.3636e-1 -	1.1704e+0 -	6.3065e-1
DTLZ4	8	7.7444e-1 -	3.2399e-1 +	3.4129e-1 -	4.7125e-1 -	3.7944e-1 -	3.2919e-1
	15	8.1657e-1 -	6.2979e-1 -	6.4753e-1 =	6.5907e-1 -	6.5611e-1 -	6.2901e-1
	20	7.9780e-1 -	6.2360e-1 -	6.7931e-1 -	6.3778e-1 -	6.2881e-1 -	6.2248e-1
DTLZ5	8	1.1706e-1 =	3.6181e-1 -	2.6567e-1 -	9.8289e-2 +	3.0152e-1 -	1.1692e-1
	15	9.8078e-2 +	4.3265e-1 -	2.4786e-1 -	1.4154e-1 +	7.0185e-1 -	1.7947e-1
	20	1.1002e-1 +	4.7554e-1 -	7.8550e-1 -	1.2703e-1 +	7.1101e-1 -	1.7383e-1
DTLZ6	8	2.0151e-1 -	2.8354e-1 -	5.4413e-1 -	1.6619e-1 -	5.8328e-1 -	1.2222e-1
	15	1.2719e-1 +	2.1070e-1 =	8.3715e-1 -	1.7949e-1 +	6.9989e-1 -	2.2317e-1
	20	1.2398e-1 =	2.0609e-1 -	7.3565e+0 -	1.9652e-1 -	6.6232e-1 -	1.3067e-1
DTLZ7	8	9.9589e-1 -	1.4446e+0 -	7.8903e-1 -	9.2319e-1 -	3.0417e+0 -	7.3401e-1
	15	4.6714e+0 -	2.4363e+0 -	8.3223e+0 -	2.7886e+0 -	1.0949e+1 -	1.8720e+0
	20	6.9594e+0 -	2.7994e+0 -	9.3043e+0 -	3.2304e+0 -	1.5022e+1 -	2.2583e+0
$+/-=$		3/15/3	7/12/2	1/18/2	4/16/1	0/20/1	

‘+’、‘-’ 和 ‘=’ 分别表示获得的结果与 MaOEA/PAS-ESC 相比更好, 更差和相似。

表 3 NSGA-II/SDR、RVEA、NSGA-III、MOEA/D-AWA、MOMBI-II 和 MaOEA/PAS-ESC 在 DTLZ1 DTLZ7 上获得的 8、15、20 目标 HV 值的统计结果

Problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
DTLZ1	8	9.2064e-1 -	9.9752e-1 +	9.9599e-1 +	9.9158e-1 -	9.1461e-1 -	9.9393e-1
	15	8.9996e-1 -	9.9854e-1 +	9.1465e-1 -	9.6370e-1 -	8.1110e-1 -	9.8164e-1
	20	9.2368e-1 -	9.9949e-1 +	9.2593e-1 -	9.6465e-1 -	8.9220e-1 -	9.8937e-1
DTLZ2	8	7.3762e-1 -	9.2381e-1 =	9.1752e-1 -	9.1301e-1 -	9.2575e-1 +	9.2370e-1
	15	8.4648e-1 -	9.8980e-1 -	9.7715e-1 -	8.8876e-1 -	8.1819e-1 -	9.9026e-1
	20	9.9369e-1 -	9.9858e-1 -	8.6379e-1 -	9.0065e-1 -	8.6527e-1 -	9.9858e-1
DTLZ3	8	9.0228e-1 =	9.0326e-1 =	3.4342e-1 -	8.0002e-1 -	8.6349e-1 =	9.0231e-1
	15	9.1679e-1 =	7.4875e-1 -	2.9644e-2 -	6.4170e-1 -	4.1371e-1 -	9.5509e-1
	20	9.8781e-1 -	9.9545e-1 +	0.0000e+0 -	7.3039e-1 -	4.5300e-1 -	9.9240e-1
DTLZ4	8	4.3887e-1 -	9.2246e-1 -	9.1455e-1 -	8.8260e-1 -	9.1862e-1 -	9.2525e-1
	15	7.3442e-1 -	9.9027e-1 -	9.8134e-1 -	9.7411e-1 -	9.8277e-1 -	9.9092e-1
	20	8.6550e-1 -	9.9867e-1 -	9.8081e-1 -	9.9681e-1 -	9.9833e-1 -	9.9872e-1

	8	9.1807e-2 +	9.0900e-2 =	9.1952e-2 +	9.9766e-2 +	9.6995e-2 +	8.9582e-2
DTLZ5	15	9.0533e-2 +	9.1041e-2 +	8.6535e-2 -	9.2212e-2 +	9.1476e-2 +	8.9806e-2
	20	8.9702e-2 =	9.0933e-2 +	5.7591e-4 -	9.1634e-2 +	9.1263e-2 +	8.9746e-2
	8	9.1581e-2 -	9.2534e-2 =	6.2982e-2 -	9.9832e-2 +	9.2373e-2 =	9.2854e-2
DTLZ6	15	9.1049e-2 =	8.7793e-2 -	3.9408e-2 -	9.1978e-2 +	9.1378e-2 =	9.1314e-2
	20	9.0896e-2 -	8.7914e-2 -	0.0000e+0 -	9.1623e-2 +	9.1388e-2 =	9.1213e-2
	8	1.7937e-1 +	1.4987e-1 =	1.9670e-1 +	1.2461e-1 -	1.7749e-1 +	1.6103e-1
DTLZ7	15	1.3853e-8 -	1.1647e-1 -	1.4947e-1 +	1.3870e-2 -	1.2215e-1 -	1.3049e-1
	20	0.0000e+0 -	1.0222e-1 -	1.1764e-1 -	5.0286e-5 -	1.1682e-1 -	1.2441e-1
+/-=		3/14/4	6/10/5	4/17/0	6/15/0	5/12/4	

‘+’，‘-’ 和 ‘=’ 分别表示获得的结果与 MaOEA/PAS-ESC 相比更好，更差和相似。

DTLZ1-DTLZ4 的 PF 形状表现为规则形状， DTLZ5-DTLZ7 的 PF 形状表现为不规则形状。 MaOEA/PAS-ESC 在 DTLZ2 的 20 目标、 DTLZ3 的 15 目标、 DTLZ4 的 15 和 20 目标以及 DTLZ7 的 20 目标上获得了最好的性能，这些测试问题具有不同的 PFs。由于算法生成均匀分布的初始参考点集，则在应对规则 PF 的高维多目标优化问题时，无需更新存档，而算法中采用了参考点自适应方法，在原先参考点的基础上，对每个参考点检测与该参考点所在参考向量垂直距离最近的解，并将参考点沿参考向量方向移动到离该解最近的位置进行自适应调整，故能有效处理不规则 PF 的高维多目标优化问题，且算法的 PAS 和 ESC 适应度计算中均使用了解之间的距离，可以增强分布性。尽管 MaOEA/PAS-ESC 没有在所有的测试问题上表现出完全的优势，但是总体较优。综上所述， MaOEA/PAS-ESC 能有效处理具有规则和不规则的 PFs 分布的高维多目标问题。

3.3 算法在 WFG 测试集的对比分析

为探讨算法在 WFG 测试问题上的性能表现，本节中给出了 MaOEA/PAS-ESC 与其他算法在 WFG 测试集上的对比实验结果。

表 4 和表 5 分别是算法在测试问题 WFG1-9 上 IGD 值和 HV 值的统计实验结果。 WFG1 的 PF 形状具有凸型和混合结构， WFG2 的 Pareto 前沿形状表现为凸型和断开， WFG3 的 Pareto 前沿形状具有线性和退化的特性， WFG4-WFG9 的 Pareto 前沿形状都是规则的，表现为凹型。 MaOEA/PAS-ESC 在 WFG2 和 WFG4-9 相关测试实例中表现出较大的优势。由于 MaOEA/PAS-ESC 中的种群分解均匀生成参考点，则算法在凹型的规则 Pareto 前沿问题上表现优异。综合考虑各算法在测试问题 WFG1-9 上实验统计结果， MaOEA/PAS-ESC 能有效处理凹型的规则 PF 和断开

PF。

3.4 算法在 MaF 测试集的对比分析

为更深入探讨 MaOEA/PAS-ESC 在处理不同 PF 测试问题的性能，表 6 展示了相关算法在测试问题 MaF1-13 上 IGD 值统计结果。 MaF1 的 PF 为线性， MaF2 、 MaF4 和 MaF12 的 PF 为凹形， MaF3 和 MaF5 的 PF 为凸形， MaF6 和 MaF13 的 PF 为凹形和退化， MaF7 的 PF 为混合型和退化， MaF8 和 MaF9 的 PF 为线性和退化， MaF10 的 PF 是混合型， MaF11 的 PF 是凸形和断开。 MaOEA/PAS-ESC 在 MaF2 、 MaF3 、 MaF5 、 MaF6 、 MaF7 、 MaF8 、 MaF9 、 MaF11 、 MaF12 和 MaF13 相关测试实例中表现优秀。综上所述， MaOEA/PAS-ESC 能很好处理线性、凹型、断开型、退化型等多种 PFs 分布。

3.5 算法在 MaF 测试集的对比分析

为更深入探讨 MaOEA/PAS-ESC 在处理不同 PF 测试问题的性能，表 6 展示了相关算法在测试问题 MaF1-13 上 IGD 值统计结果。 MaF1 的 PF 为线性， MaF2 、 MaF4 和 MaF12 的 PF 为凹形， MaF3 和 MaF5 的 PF 为凸形， MaF6 和 MaF13 的 PF 为凹形和退化， MaF7 的 PF 为混合型和退化， MaF8 和 MaF9 的 PF 为线性和退化， MaF10 的 PF 是混合型， MaF11 的 PF 是凸形和断开。 MaOEA/PAS-ESC 在 MaF2 、 MaF3 、 MaF5 、 MaF6 、 MaF7 、 MaF8 、 MaF9 、 MaF11 、 MaF12 和 MaF13 相关测试实例中表现优秀。综上所述， MaOEA/PAS-ESC 能很好处理线性、凹型、断开型、退化型等多种 PFs 分布。

3.6 时间复杂度分析

时间复杂度是评价算法性能的重要指标之一，本文中的算法复杂度主要分为种群选择和参考点自适应。下面对这两个部分进行分析：

表 4 NSGA-II/SDR、RVEA、NSGA-III、MOEA/D-AWA、MOMBI-II 和 MaOEA/PAS-ESC 在 WFG1-WFG9 上获得的 8、15、20 目标 IGD 值的统计结果

Problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
WFG1	8	1.7135e+0 -	9.7311e-1 =	1.1071e+0 -	1.1984e+0 -	1.1723e+0 -	9.7771e-1
	15	2.4915e+0 -	1.8796e+0 +	2.0512e+0 -	2.2381e+0 -	2.5646e+0 -	1.9766e+0
	20	5.1403e+0 -	3.9130e+0 +	4.1404e+0 =	4.5769e+0 -	4.6544e+0 -	4.2695e+0
WFG2	8	1.4539e+0 -	1.0235e+0 -	1.0336e+0 =	1.3469e+0 -	1.3059e+0 -	9.3953e-1
	15	2.3978e+0 -	1.7835e+0 +	1.8762e+0 -	2.2300e+0 -	6.8180e+0 -	1.7950e+0
	20	5.1626e+0 -	3.4582e+0 +	4.0219e+0 -	4.3464e+0 -	8.9481e+0 -	3.9024e+0
WFG	8	9.7348e-1 +	2.3130e+0 -	1.6901e+0 -	1.8823e+0 -	7.9373e+0 -	1.4378e+0
	15	4.5768e+0 -	7.5163e+0 -	3.3587e+0 +	5.2343e+0 -	1.5720e+1 -	3.8941e+0
	20	8.6516e+0 -	1.2315e+1 -	8.6606e+0 -	6.4433e+0 -	2.1106e+1 -	5.4960e+0
WFG4	8	3.2222e+0 -	2.9949e+0 +	2.9795e+0 +	3.2248e+0 -	3.7018e+0 -	3.0119e+0
	15	9.4365e+0 -	9.4458e+0 -	9.3499e+0 +	1.0352e+1 -	1.9995e+1 -	9.4083e+0
	20	1.4420e+1 -	1.2411e+1 -	1.2584e+1 -	1.5049e+1 -	2.8877e+1 -	1.1508e+1
WFG5	8	3.2475e+0 -	2.9775e+0 +	2.9417e+0 +	3.1646e+0 -	3.6710e+0 -	2.9919e+0
	15	9.2361e+0 +	9.2456e+0 +	9.2307e+0 +	9.5499e+0 -	2.4912e+1 -	9.3212e+0
	20	1.1921e+1 -	1.1663e+1 -	1.1564e+1 -	1.3507e+1 -	3.6770e+1 -	1.1539e+1
WFG6	8	3.3419e+0 -	3.0416e+0 -	2.9618e+0 +	3.1293e+0 -	3.6826e+0 -	3.0282e+0
	15	1.0212e+1 -	1.0160e+1 -	9.4992e+0 -	9.6427e+0 -	1.8732e+1 -	9.3777e+0
	20	1.9131e+1 -	1.3048e+1 -	1.4283e+1 -	1.3485e+1 -	2.8154e+1 -	1.1542e+1
WFG7	8	3.2980e+0 -	3.0344e+0 =	2.9741e+0 +	3.0807e+0 -	3.5748e+0 -	3.0264e+0
	15	1.0831e+1 -	9.2507e+0 +	9.2994e+0 =	9.5089e+0 =	1.7790e+1 -	9.3265e+0
	20	1.5360e+1 -	1.2055e+1 -	1.4413e+1 -	1.3819e+1 -	2.5935e+1 -	1.1552e+1
WFG8	8	3.3361e+0 -	3.0981e+0 -	3.2822e+0 -	3.5217e+0 -	3.9773e+0 -	3.0554e+0
	15	1.0435e+1 -	9.7470e+0 -	9.1759e+0 +	1.1893e+1 -	2.0239e+1 -	9.3364e+0
	20	1.4624e+1 -	1.2571e+1 -	1.4227e+1 -	1.8623e+1 -	3.0546e+1 -	1.1561e+1
WFG9	8	3.1773e+0 -	2.9860e+0 -	2.9349e+0 +	3.2263e+0 -	3.7053e+0 -	2.9600e+0
	15	8.9588e+0 +	9.2440e+0 -	8.7524e+0 +	9.7625e+0 -	2.6032e+1 -	9.0793e+0
	20	1.2525e+1 -	1.1907e+1 -	1.3358e+1 -	1.5236e+1 -	3.8078e+1 -	1.1708e+1
+/-=		3/24/0	7/17/3	10/14/3	0/26/1	0/27/0	

‘+’，‘-’ 和 ‘=’ 分别表示获得的结果与 MaOEA/PAS-ESC 相比更好，更差和相似。

表 5 NSGA-II/SDR、RVEA、NSGA-III、MOEA/D-AWA、MOMBI-II 和 MaOEA/PAS-ESC 在 WFG1-WFG9 上获得的 8、15、20 目标 HV 值的统计结果

Problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
WFG1	8	9.7761e-1 +	9.1367e-1 -	8.3427e-1 -	9.9947e-1 +	9.9711e-1 +	9.3773e-1
	15	9.8638e-1 -	9.6448e-1 -	9.8695e-1 -	9.9678e-1 -	9.4735e-1 -	9.9721e-1
	20	9.8793e-1 -	9.9824e-1 -	9.9911e-1 +	9.8904e-1 -	9.8746e-1 -	9.9883e-1
WFG2	8	9.7427e-1 -	9.7705e-1 -	9.9365e-1 =	9.9457e-1 +	9.8273e-1 -	9.9264e-1
	15	9.8358e-1 -	9.6487e-1 -	9.9223e-1 =	9.8928e-1 -	8.8672e-1 -	9.9297e-1
	20	9.8918e-1 -	9.8313e-1 -	9.9307e-1 -	9.9396e-1 =	9.1704e-1 -	9.9499e-1
WFG	8	4.1808e-2 +	1.6206e-3 -	1.5211e-2 +	7.9948e-2 +	1.1488e-1 +	7.4268e-3
	15	0.0000e+0 =	0.0000e+0 =	0.0000e+0 =	0.0000e+0 =	0.0000e+0 =	0.0000e+0
	20	0.0000e+0 =	0.0000e+0 =	0.0000e+0 =	0.0000e+0 =	0.0000e+0 =	0.0000e+0
WFG4	8	9.0332e-1 =	8.9390e-1 -	8.9731e-1 -	8.5821e-1 -	8.1945e-1 -	9.0309e-1
	15	9.5636e-1 -	9.4632e-1 -	9.6736e-1 -	9.0005e-1 -	4.7806e-1 -	9.7559e-1
	20	8.5872e-1 =	9.6491e-1 -	8.8137e-1 -	9.3391e-1 -	5.5829e-1 -	9.8307e-1
WFG5	8	8.5116e-1 -	8.5616e-1 +	8.5792e-1 +	7.9347e-1 -	7.3331e-1 -	8.5490e-1
	15	9.0783e-1 -	9.1284e-1 +	9.0907e-1 -	8.5051e-1 -	2.3827e-1 -	9.1224e-1
	20	9.0944e-1 -	9.1514e-1 -	8.9564e-1 -	8.6443e-1 -	2.5545e-1 -	9.1594e-1
WFG6	8	8.4467e-1 +	8.1738e-1 -	8.2430e-1 =	7.9502e-1 -	7.1232e-1 -	8.3240e-1
	15	8.3528e-1 =	6.4308e-1 -	8.8390e-1 =	8.1504e-1 -	4.3290e-1 -	8.7598e-1
	20	5.1046e-1 -	6.6733e-1 -	8.2569e-1 -	8.4652e-1 -	4.7415e-1 -	8.9321e-1
WFG7	8	9.0793e-1 =	8.8847e-1 -	9.0867e-1 =	8.9069e-1 -	8.3747e-1 -	9.0851e-1
	15	8.3364e-1 -	7.7959e-1 -	9.7814e-1 -	8.9192e-1 -	4.8880e-1 -	9.8142e-1
	20	8.7031e-1 -	6.3203e-1 -	8.6363e-1 -	9.2078e-1 -	5.7210e-1 -	9.9331e-1
WFG8	8	8.0555e-1 =	6.8981e-1 -	7.8084e-1 -	7.2451e-1 -	6.0278e-1 -	7.9702e-1
	15	7.0907e-1 -	5.4769e-1 -	9.0890e-1 -	7.7216e-1 -	3.5838e-1 -	9.2911e-1
	20	8.0827e-1 -	6.4449e-1 -	6.2761e-1 -	8.3052e-1 -	3.8764e-1 -	9.6435e-1
WFG9	8	8.5826e-1 +	6.8981e-1 -	7.9048e-1 -	7.3883e-1 -	7.4734e-1 -	8.3413e-1
	15	9.0338e-1 +	7.7430e-1 -	8.8321e-1 +	7.0668e-1 -	2.2702e-1 -	8.7253e-1
	20	9.0611e-1 +	7.8637e-1 -	8.2622e-1 -	7.2930e-1 -	2.3728e-1 -	8.9379e-1
+/-=		6/14/7	2/23/2	4/16/7	3/21/3	2/23/2	

‘+’，‘-’和‘=’分别表示获得的结果与 MaOEA/PAS-ESC 相比更好，更差和相似。

表 6 NSGA-II/SDR、RVEA、NSGA-III、MOEA/D-AWA、MOMBI-II 和 MaOEA/PAS-ESC 在 MaF1 MaF15 上获得的 8、15、20 目标 IGD 值的统计结果

Problem	M	NSGA-II/SDR	RVEA	NSGA-III	MOEA/D-AWA	MOMBI-II	MaOEA/PAS-ESC
MaF1	8	2.0196e-1 +	5.3628e-1 -	2.8126e-1 -	3.5449e-1 -	3.5620e-1 -	2.1614e-1
	15	3.1241e-1 +	6.4271e-1 -	3.4697e-1 +	5.6009e-1 -	4.3067e-1 -	3.6005e-1
	20	3.4289e-1 +	7.6483e-1 -	4.4604e-1 -	6.3371e-1 -	5.5076e-1 -	3.8809e-1
MaF2	8	2.0166e-1 -	2.4253e-1 -	2.3729e-1 -	1.9693e-1 -	2.9697e-1 -	1.8041e-1
	15	3.6297e-1 -	7.2578e-1 -	2.6833e-1 =	2.7023e-1 =	8.4542e-1 -	2.5922e-1
	20	3.4635e-1 -	7.3499e-1 -	2.5425e-1 =	2.8138e-1 -	8.5454e-1 -	2.4525e-1
MaF3	8	1.7637e-1 -	3.2618e-1 -	1.1799e+3 -	1.2681e-1 -	1.3822e-1 -	1.2270e-1
	15	1.4220e-1 +	2.5180e-1 +	1.5239e+5 -	1.4436e-1 +	2.6666e-1 -	2.6477e-1
	20	1.9824e-1 +	1.4712e-1 +	6.3508e+3	1.8459e-1 +	2.6866e-1 -	2.0112e-1
MaF4	8	5.6524e+1 -	5.7877e+1 -	2.9984e+1 +	2.4163e+1 +	3.4805e+1 =	3.6338e+1
	15	9.4723e+3 -	8.8526e+3 -	3.6740e+3 +	6.0954e+3 =	4.6645e+3 +	5.7348e+3
	20	3.0216e+5 -	2.6734e+5 -	1.1442e+5 +	1.6393e+5 =	1.4362e+5 +	1.8281e+5
MaF5	8	8.2728e+1 -	2.2852e+1 -	2.0902e+1 -	2.3440e+1 =	2.2338e+1 -	1.8706e+1
	15	7.2255e+3 -	3.4061e+3 -	3.1131e+3 -	2.8146e+3 =	3.0680e+3 =	2.9539e+3
	20	1.6855e+5 -	6.2557e+4 +	6.4664e+4 =	6.5312e+4 =	6.5097e+4 =	6.2808e+4
MaF6	8	1.4563e-2 -	1.0310e-1 -	1.4691e-1 -	1.8308e-2 -	6.5449e-1 -	2.9882e-3
	15	5.4403e-3 +	2.5688e-1 -	2.6521e+0 -	7.6206e-2 =	6.9899e-1 -	8.5228e-2
	20	5.4105e-2 +	1.7506e-1 -	1.4696e+0 -	6.2768e-2 +	6.5874e-1 -	9.2914e-2
MaF7	8	1.0026e+0 -	1.5142e+0 -	8.0274e-1 -	9.2733e-1 -	3.0465e+0 -	7.3437e-1
	15	4.5002e+0 -	2.4548e+0 -	5.8737e+0 -	2.5730e+0 -	1.0916e+1 -	1.8360e+0
	20	7.1063e+0 -	2.9073e+0 -	9.1576e+0 -	3.0864e+0 -	1.5111e+1 -	2.5870e+0
MaF8	8	1.8105e-1 -	7.8713e-1 -	3.2069e-1 -	7.6703e-1 -	1.1760e+0 -	1.4486e-1
	15	3.0190e-1 -	1.2333e+0 -	4.1706e-1 -	1.2371e+0 -	2.3688e+0 -	2.2124e-1
	20	2.3325e-1 -	1.3465e+0 -	4.1788e-1 -	1.4257e+0 -	2.4729e+0 -	1.9807e-1
MaF9	8	2.1320e-1 -	6.3858e-1 -	1.1413e+0 -	7.5017e-1 -	1.3285e+0 -	2.0011e-1
	15	2.4759e-1 -	2.8927e+0 -	3.2347e+0 -	4.3630e+0 -	9.7584e+0 -	2.1494e-1
	20	2.1894e-1 +	2.3160e+0 -	1.2408e+1 -	6.1388e+0 -	1.4094e+1 -	2.3070e-1
MaF10	8	1.6820e+0 -	9.6804e-1 =	1.0835e+0 -	1.1690e+0 -	1.1575e+0 -	9.6811e-1
	15	2.4986e+0 -	1.8702e+0 +	2.1548e+0 -	2.2544e+0 -	2.6502e+0 -	2.0362e+0
	20	5.1385e+0 -	3.8970e+0 +	4.2030e+0 =	4.5866e+0 -	4.8587e+0 -	4.2965e+0
MaF11	8	1.4536e+0 -	1.0215e+0 -	1.0906e+0 =	1.3240e+0 -	1.2333e+0 -	9.5422e-1
	15	2.3996e+0 -	1.7867e+0 +	2.1668e+0 -	2.2007e+0 -	6.7236e+0 -	1.9039e+0
	20	5.1740e+0 -	3.4755e+0 +	4.0531e+0 =	4.2372e+0 -	9.2570e+0 -	3.9263e+0
MaF12	8	3.1801e+0 -	2.9701e+0 -	2.9661e+0 -	3.2141e+0 -	3.7100e+0 -	2.9596e+0
	15	9.0585e+0 +	9.2653e+0 -	9.1742e+0 =	9.7700e+0 -	2.5924e+1 -	9.1019e+0
	20	1.2864e+1 -	1.1796e+1 =	1.3780e+1 -	1.4774e+1 -	3.7433e+1 -	1.1716e+1
MaF13	8	1.9081e-1 -	7.7252e-1 -	2.5367e-1 -	3.0729e-1 -	1.3512e+0 -	1.2956e-1
	15	2.0695e-1 -	1.1801e+0 -	3.2082e-1 -	4.4275e-1 -	1.9050e+0 -	1.8201e-1
	20	1.7420e-1 -	1.4142e+0 -	2.9203e-1 -	3.8626e-1 -	2.2111e+0 -	1.5376e-1
+/-=		9/30/0	7/30/2	4/28/7	4/28/7	2/34/3	

‘+’，‘-’和‘=’分别表示获得的结果与 MaOEA/PAS-ESC 相比更好，更差和相似。

在种群选择中，最主要的部分分别为 PAS 算法和 ESC 算法。PAS 算法中的种群归一化部分的时间复杂度为 $O(MN)$ ，其中目标数为 M ，种群大小为 N 。种群划分的时间复杂度为 $O(MN^2)$. JFAD 的时间复杂度为 $O(MN^2)$. ESC 精英选择的时间复杂度为 $O(N^2)$.

在参考点自适应中，存档更新的时间复杂度为 $O(N^2)$ ，参考点调整的时间复杂度为 $O(N^2)$.

由以上分析可知，本文提出的算法的时间复杂度为 $O[(2M + 3)N^2]$.

3.7 参数分析

MaOEA/PAS-ESC 中， α 、 β 、 a 和 b 是四个主要参数。且 $\alpha + \beta = 1$ 、 $a + b = 1$ ，故仅需探讨参数 α 和 a 。为考察 MaOEA/PAS-ESC 对 α 和 a 的敏感性，采用测试问题 WFG2. 图 3 中 (a) 和 (b)、(c) 和 (d) 分别对应参数 α 和 a 。

图 3 中给出的是参数 α 和 a 不同取值的 HV 值折线图，(a) 和 (c) 显示参数取值为 0~1 的折线，(b) 显示参数 α 在 0.70~0.80 的折线，(d) 显示参数 a 取值 0.30~0.40 的折线。从图 3 中可以看出，MaOEA/PAS-ESC 对 α 和 a 均非常敏感。(a) 显示 α 取值在 0.7~0.8，(b) 确定 α 取值为 0.73，(c) 显示

a 取值在 0.3~0.4, (d) 确定 a 取值为 0.34. 综上所述, $\alpha=0.73$, $a = 0.34$ 时, MaOEA/PAS-ESC 取得最

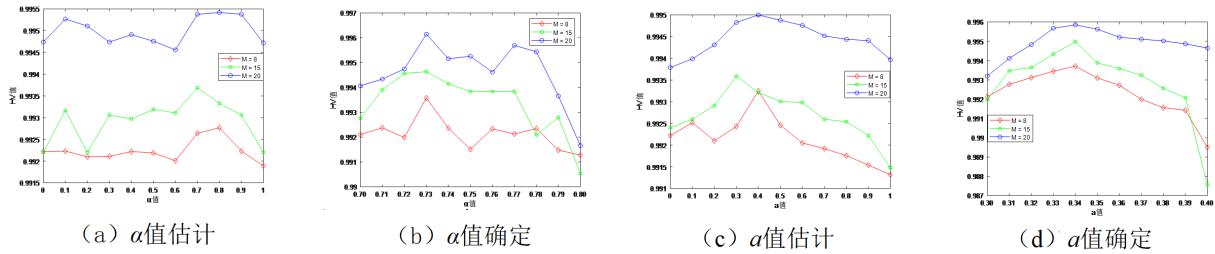


图 3 MaOEA/PAS-ESC 获得的 HV 平均值

4 总结

为提高处理不同类型 PFs 的 MaOPs 的普适性, 本文提出了一种基于 PAS 和 ESC 的高维多目标进化算法 MaOEA/PAS-ESC. 首先, 将种群分解为多个子种群, 利用解与参考向量的角度和解之间距离选择多样性良好的解. 然后, 在淘汰的解中, 利用解与参考点之间的距离和角度选择收敛性良好的解, 合并选择的两组解, 获得下一代种群.

上述实验表明, 与其他的几种算法相比较, MaOEA/PAS-ESC 算法在不同 PF 形状的 MOPs 和 MaOPs 中都具有较强的竞争力. 运用 PAS 和 ESC 能很好地平衡收敛性和多样性. 算法在高维情况下的性能表现优异. 但在, 低维的性能不是很理想, 且运算时间较长. 这是由于低维情况下种群中解的数量较少, 解的分布较密集, 使用参考点自适应策略与种群分解, 在多样性方面性能不佳, 且使用参考点自适应策略, 极大地增加运行时间. 因此, 我们的下一步工作是改进种群选择算法, 使得算法在低维情况下能够有效指导种群优化, 提高种群的收敛性和多样性且能有效缩短运行时间.

参考文献 (References)

- [1] Aimin Zhou a. Multiobjective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1 (1): 32 - 49
- [2] Zhang J W, Xing L N. A Survey of Multiobjective Evolutionary Algorithms[C]. IEEE International Conference on Computational Science & Engineering. IEEE, 2017: 93-100.
- [3] Yun Yang, Jianping Luo, Lei Huang, et al. A many-objective evolutionary algorithm with epsilon-indicator direction vector[J]. Applied Soft Computing Journal, 2019, 76: 326-355.
- [4] Handing Wang. Diversity Assessment in Many- Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47 (6): 1510-1522
- [5] Zhou A, Jin Y, Zhang Q, et al. Combining model-based and genetics-based offspring generation for multi-objective optimization using a convergence criterion[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2006: 892-899.
- [6] While, L. Hingston, P. Barone, et al. A faster algorithm for calculating hypervolume[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006, 10(1): 29-38.
- [7] 刘建昌, 赵阳杰, 李飞. 基于 R2 指标的昂贵多目标进化算法 [J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 823-832.
(Liu J C, Zhao Y J, Li F. Expensive multi-objective optimization algorithm based on R2 indicator[J]. Control and Decision, 2020, 35(4): 823-832.)
- [8] Yang S, Li M, Liu X, et al. A Grid-Based Evolutionary Algorithm for Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.
- [9] Ye T , Ran C , Xingyi Z , et al. A Strengthened Dominance Relation Considering Convergence and Diversity for Evolutionary Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019: 331-345.
- [10] Elarbi M, Bechikh S, Gupta A, et al. A New Decomposition-Based NSGA-II for Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(99): 1191-1210.
- [11] Liu Y, Zhu N, Li K, Li M, J Zheng, and K Li. An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization[J]. Information Sciences, 2020, 509: 376-399.
- [12] Lei Chen. Evolutionary Many-Objective Algorithm Using Decomposition- Based Dominance Relationship[J]. Cybernetics IEEE Transactions on, 2019, 49 (12): 4129-4139.
- [13] Li M , Yang S , Liu X . Shift-Based Density Estimation for Pareto-Based Algorithms in Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(3): 348-365.
- [14] Zitzler E, Thiele L. Multi-objective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271.
- [15] Wang, R, Purshouse, et al. Preference-Inspired Coevolutionary Algorithms for Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(4): 474-494.
- [16] 巩敦卫, 季新芳, 孙晓燕. 基于集合的高维多目标优化问题的进化算法 [J]. 电子学报, 2014, 42(1):77-83.
(Gong D W, Ji X F, Sun X Y. Evolutionary algorithm for many-objective optimization problems based on set[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(1): 77-83.)
- [17] Ishibuchi H , Setoguchi Y , Masuda H , et al. Performance of Decomposition-Based Many-Objective Algorithms Strongly Depends on Pareto Front Shapes[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017, 21(2): 169-190.
- [18] Zhou J, Yao X, Chan F T S, Gao L, Jing X, Li X, Lin Y, Li Y. A decomposition based evolutionary algorithm with direction vector adaption and selection enhancement[J]. Information Sciences, 2019, 501: 248-271.
- [19] Van D A, Gary V, Lamont B. Multiobjective Evolutionary Algorithm Research: A History and Analysis[J]. Evolutionary Computation, 1998, 8(2): 125-147.
- [20] Tian Y, Cheng R, Zhang X. An Indicator-Based Multiobjective Evolutionary Algorithm with Reference Point Adaptation for Better Versatility[J]. IEEE Transactions on Evolutionary

- Computation, 2018, 22(4): 609-622.
- [21] Sun, Yanan. IGD Indicator- Based Evolutionary Algorithm for Many- Objective Optimization Problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23 (2) : 173-187.
- [22] Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 181(3): 1653-1669.
- [23] Hernández Gómez R, Coello Coello C A. Improved Metaheuristic Based on the R2 Indicator for Many-Objective Optimization. In: Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. New York, USA: ACM, 2015: 679-686.
- [24] Li F, Cheng R, Liu J. A two-stage R2 indicator based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. Applied Soft Computing Journal, 2018, 67: 245-260.
- [25] Phan D H, Suzuki J. R2-IBEA: R2 indicator based evolutionary algorithm for multi-objective optimization. In: Proceedings of the 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Cancun, Mexico: IEEE, 2013. 1836-1845.
- [26] Johannes Bader, Eckart Zitzler. HypE: An Algorithm for Fast Hypervolume-Based Many-Objective Optimization[J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(1): 45-76.
- [27] Deb, K. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference- Point- Based Nondominated Sorting Approach, Part I: Solving Problems With Box Constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18 (4): 577-601.
- [28] Cheng R, Jin Y, Olhofer M. A Reference Vector Guided Evolutionary Algorithm for Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 773-791.
- [29] Rui W, Zhou Z, Ishibuchi H. Localized Weighted Sum Method for Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(1): 3-18.
- [30] Li J , Chen G , Li M , et al. An Adaptative Reference Vector Based Evolutionary Algorithm for Many-Objective Optimization[J]. IEEE Access, 2019, 7: 80506-80518.
- [31] Jiang S , Yang S . A strength pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multi-objective and many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017: 329-346.
- [32] 巩敦卫, 刘益萍, 孙晓燕. 基于目标分解的高维多目标并行进化优化方法 [J]. 自动化学报, 2015(08):1438-1451.
(Gong D W, Liu Y P, Sun X Y. Many-objective parallel evolutionary optimization method based on objective decomposition[J]. Acta Automatica Sinica, 2015(08): 1438-1451.)
- [33] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. A Strengthened Dominance Relation Considering Convergence and Diversity for Evolutionary Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018: 331-345.
- [34] Yutao Qi.MOEAD with Adaptive Weight Adjustment[J] . Evolutionary Computation, 2014, 22(2): 231-264.
- [35] Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization. In: Proceedings of the 2005 Evolutionary Multi-objective Optimization. London: Springer, 2005: 105-145.
- [36] Huband S, Barone L C, While L, et al. A scalable multi-objective test problem toolkit[J]. Lecture Notes in Computer ence, 2005, 3410: 280-295.
- [37] Ran Cheng.A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J] . Complex & Intelligent Systems, 2017, 3(1): 67-81.
- [38] Ye Tian.PlatEMO: A MATLAB Platform for Evolutionary Multi-Objective Optimization[J] . IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 73-87.

作者简介

覃灏 (1995-), 男, 硕士研究生, 主要从事进化计算方面的研究, E-mail:qin95117@163.com;

李军华 (1974-), 男, 教授, 硕士生导师, 主要从事进化计算、智能控制等方面的研究, E-mail:jhlee126@126.com.