多尺度集值决策信息系统

陈应生[1]，李进金[1,2†]，林荣德[1]，陈东晓[1]，黄哲煌[1]

(1 华侨大学数学科学学院，计算科学福建省高校重点实验室，福建，泉州，362021；
2 闽南师范大学数学与统计学院，福建，漳州，363000)

摘 要: 集值信息系统中的对象的属性值多值化，以达到对复杂信息更全面的刻画. 在传统的集值信息系统中，每一个属性只有一个尺度. 但在具体的应用过程中，人们往往需要在不同的尺度上处理和分析数据. 为此，本文首次将多尺度信息系统的粒度转换函数引入集值信息系统中，建立了多尺度集值信息系统的理论框架. 并讨论该系统的不同尺度间信息粒、粗糙集的关系. 在此基础上，建立了多尺度集值决策信息系统的粒计算模型. 并讨论了该模型不同尺度间协调性的传递性质. 然后，我们讨论了协调和不协调的多尺度集值决策信息系统的最优尺度选择方法. 本文改进了多尺度决策信息系统的粒计算模型，在理论分析和实际应用中有一定的价值.

关键词: 粒计算；粗糙集；集值决策信息系统；粒度转换函数；多尺度；最优尺度选择.

中图分类号: TP301　　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0882

Multi-Scale Set Value Decision Information System

Chen ying-sheng[1]，*Li jin-jin*[1,2†]，*Lin rong-de*[1]，*Chen dong-xiao*[1]，*Huang zhe huang*[1]

(1.Fujian Province University Key Laboratory of Computational Science, School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou, China, 362021；
2.School of Mathematics Sciences and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou,Fujian, China,363000)

Abstract: The set-valued information system allows the object to have attribute multi-valued to achieve a more comprehensive description of complex information. In traditional set-valued information systems, each attribute has only one scale. But in the specific application process, people often need to process and analyze the data at different scales. In this paper, the granularity transformation function of multi-scale information system is introduced into the set-valued information system for the first time, and the theoretical framework of the multi-scale set-valued information system is established. The relationship of information grains and rough sets between different scales of the system is discussed. On this basis, a multi-scale set-valued decision information system model is established. The transfer properties of consistent between different scales of the model are discussed. then, we discuss the optimal scale selection method for a consistent and inconsistent multi-scale set-valued decision information system. This paper improves the granular computing model of multi-scale decision information system, which has certain value in theoretical analysis and practical application.

Keywords: granular computing；Rough sets；Set value decision information system；the granularity transformation function：Multi-scale；Optimal scale selection .

0 引 言

粒计算是从海量不确定信息和数据中发现知识和规律的重要方法之一，它通过把满足某一特定条件或属性的对象组成集合来构造信息粒，选择合适的信息粒，实现了从不同角度和层次的数据分析. 自 1979 年 Zadeh[1] 提出模糊信息粒的思想以来，很多学者对这个领域进行研究 [2-10]，相继提出了模糊集、粗糙集、商空间、概念格 [3-6] 等信息粒化模型. 其中由 Pawlak[4] 提出的粗糙集是粒计算的重要模型，它把等价类当作一个信息粒，利用上下近似求论域子集的粗糙近似. 粗糙集近似空间时常表示为一个信息系统 [9]，这种信息系统的每个对象的属性值是唯一的. 但在现实应用中，对象的属性值往往不是唯一的. 如考查同学掌握外语的程度，可能是掌握一门外语，也可能是掌握多门外语；性格属性分为外向型、内向型、温和型、急躁型、等等，一个人可能兼有几种性格特征. 这些现实对象的属性值是多值的，为此，很多专家学者研究了集值信

收稿日期: 2020-07-03；**修回日期:** 2021-01-06.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11871259)；
福建省高校创新团队发展计划, 泉州市高层次人才团队项目（2017ZT012）
†通讯作者. E-mail: jinjinlimnu@126.com.

息系统 [11-17]. 姚 [10] 提出了集值信息系统的粒结构模型，并给出了详细的代数结构，提出了相容关系和优势关系这两种二元关系；文 [11] 提出了最大容差类的相对约简的概念，研究了集值信息系统的三种相对约简；文 [12] 针对相容关系和优势关系，给出了两种关系下论域子集粗糙近似的概念，以此为基础，给出了集值决策信息系统知识约简与规则提取的方法；文 [13,14] 研究了动态环境下集值信息系统两种计算粗糙近似的增量算法；文 [15] 研究了集值信息系统知识信息熵和粗糙熵的性质，并结合信息熵给出了两种计算粗糙近似的增量算法；文 [16,17] 提出多粒度集值信息系统，并研究其悲观多粒度粗糙集和乐观多粒度粗糙集及决策规则问题.

由于人们对信息的认识要求的不同，导致处理信息的角度与深度有所不同，为刻画这一现象，Wu-Leung 于文 [18] 提出了多尺度信息系统，提出了粒度转换函数的概念，通过这个转换函数研究不同尺度间信息粒的关系. 自多尺度思想提出以来，这种数据处理方法深受研究人员的关注，并提出了各种改进的方法和模型 [19-34]. 文 [19] 提出了不同属性具有不同尺度规模的推广模型；文 [20] 中，把该系统推广到决策也是多尺度的情况；[21-25] 将粒度转换函数引入多不完备多尺度信息系统中，系统地研究了该系统的信息粒度，粗糙近似，规则提取和最优尺度选择；文 [26] 研究了多尺度决策信息系统的知识表达和规则提取问题；文 [27] 引入属性重要度，研究该系统的最优尺度选择；文 [28] 定义了一种新的近似精度，提出了基于近似精度的最优尺度选择方法，并考虑到论域动态的情况；文 [29] 定义了一种新的尺度组合概念，结合三支决策理论，同步进行了最优尺度选择和属性约简. 随着多尺度研究的深入，很多学者研究了推广的模型. 文 [30] 研究了多尺度覆盖决策信息系统，提出了不同尺度间覆盖的粗细定义，探讨了不同尺度间覆盖的上下近似算子的关系，并给出了最优尺度选择的选择算法；文 [31] 利用矩阵方法，提出一个属性重要度，讨论多尺度覆盖决策信息系统的最优尺度选择；文 [32] 通过极大描述和极小描述获取覆盖多粒度粗糙集，利用证据理论得出该系统具有信任结构的充要条件；文 [33] 建立了的多尺度形式背景的粒结构模型，讨论系统的协调性、规则提取和最优尺度选择，并将此方法建立了智能城市的建设模型；文 [34] 建立了直觉模糊多尺度信息系统，提出了基于包含测度的两种最优尺度选择方法和约简方法.

在集值信息系统中，同样也存在多尺度的情况，例如，如果由多个专家对同一个学生的学习成绩进行评定，就有多个评定值，成绩可以记录为 0 到 100 之间的自然数，也可以分为“优秀”、“良好”、“中等”、“差”和“不可接受”；又如我们考察个人分辨颜色的能力，对于驾驶人员来说，他们只需要同时拥有红色和绿色的分辨能力就可以了，而对于学习美术的同学，他们需要拥有很强的颜色感觉，他们需要能具体分辨出深绿和浅绿，深红和浅红. 上述两个例子对象的属性值都是多值的，但在不同的尺度下要求是不同的. 生活中还有许多此类现象，在此情况下，现有的单一尺度集值信息表往往不能刻画这类问题，我们需要对不同尺度的数据进行处理和分析，受多尺度信息系统的启发，我们引入多尺度集值信息系统. 在此基础上引入多尺度集值决策信息系统，并讨论了该模型的一些性质.

本文的其余部分组织如下. 在第一节中，我们简单介绍了集值决策信息系统的基本概念和性质以及协调性；在第二节中，介绍了多尺度集值决策信息系统的理论框架，并对该系统的粒度转换关系、信息粒化、粗糙近似、协调性进行研究；第三节分为协调与不协调的情况，给出了多尺度集值决策信息系统的最优尺度选择的获取算法. 最后，我们对研究进行了总结和展望.

1 集值决策信息系统

定义 1 [11] 设 (U,A,F) 是一个集值信息系统，其中非空有限集合 $U=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为论域，$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 是一个非空有限属性集，$F=(f_a,a\in A)$ 是 U 与 A 的关系集，$f_a:U\to P_0(V_a)$ 为一个映射，其中 V_a 是属性 a 的值域，$P_0(V_a)$ 是 V_a 的非空子集的全体.

对任意的 $B\subseteq A$，定义如下优势关系 $R_B^{\subseteq}$，

$$R_B^{\subseteq}=\{(x,y)\in U\times U\mid f_a(x)\subseteq f_a(y),\forall a\in B\}.$$

根据优势关系的定义，对于属性 a，对象 x 拥有的属性值，对象 y 也一定拥有，说明针对 a 的标准，对象 y 比对象 x 优秀.

$R_B^{\subseteq}(x)=\{y\in U|(x,y)\in R_B^{\subseteq}\}$ 称为 x 关于 $R_B^{\subseteq}$ 的优势类，等价地，

$$R_B^{\subseteq}(x)=\{y\in U|f_a(x)\subseteq f_a(y),\forall a\in B\}.$$

显然，$R_B^{\subseteq}(x)=\bigcap_{a\in B}R_a^{\subseteq}(x)$.

对任意的 $X\subseteq U$，X 关于属性集 $B\subseteq A$ 的上下近似分别定义为

$$\overline{R_B^{\subseteq}}(X)=\{x\in U|R_B^{\subseteq}(x)\cap X\neq\varnothing\};$$

$$\underline{R_B^{\subseteq}}(X)=\{x\in U|R_B^{\subseteq}(x)\subseteq X\}.$$

X 关于属性集 B 的近似精度记为 $\rho=\frac{\underline{R_B^{\subseteq}}(X)}{\overline{R_B^{\subseteq}}(X)}$.

文 [11] 指出，$R_B^{\subseteq}$ 满足自反性和传递性，但不一定满足对称性，且 $\forall y\in R_B^{\subseteq}$，有 $R_B^{\subseteq}(y)\subseteq R_B^{\subseteq}(x)$.

定义 2 [13] 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 是一个集值决策信息系统，其中 (U,A,F) 是一个集值信息系统，(U,d,g) 是单属性集值信息系统. f_d 为是 U 与 A 的关系集，$f_d:U\to P_0(V_d)$，V_d 是决策属性 d 的值域，$P_0(V_d)$ 是 V_d 的非空子集的全体.

决策属性 d 定义的优势关系为

$$R_d^{\subseteq}=\{(x,y)\in U\times U|f_d(x)\subseteq f_d(y)\}.$$

对于 $x\in U$，有 $R_B^{\subseteq}(x)\subseteq R_d^{\subseteq}(x)$，则称 S 关于 x 是局部协调的，若 S 关于论域中任意对象皆为局部协调的，我们称 S 是协调的. 显然

$$S=(U,A,F,d,g)\text{ 是协调的}\Leftrightarrow R_B^{\subseteq}\subseteq R_d^{\subseteq}.$$

定义 3 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 是一个集值决策信息系统，系统 S 的正域定义为

$$Pos_A(d)=\{x\in U\mid R_B^{\subseteq}(x)\subseteq R_d^{\subseteq}(x)\}.$$

正域指的是系统协调对象的全体构成的集合，显然，如果 S 是协调的，则有 $Pos_A(d)=U$.

当系统 S 关于对象 $x\in U$ 不是局部协调的，类似于文 [18]，我们提出广义决策的定义.

定义 4 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 是集值决策信息系统，令

$$\partial_A(x)=f_d(R_A^{\subseteq}(x))=\{f_d(y)|y\in R_A^{\subseteq}(x)\}.$$

称 $\partial_A(x)$ 为 x 的广义决策函数，进一步，我们记

$$\partial_A=(\partial_A(x_1),\partial_A(x_2),\cdots,\partial_A(x_n)).$$

称之为系统 S 的广义决策.

定理 1 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 是一个集值决策信息系统，$x\in U$，S 关于 x 是局部协调的充要条件是 $\partial_A(x)\subseteq f_d(R_d^{\subseteq}(x))=\{f_d(y)|y\in R_d^{\subseteq}(x)\}$.

证明 $\Leftarrow$ 由 $f_d(R_A^{\subseteq}(x))\subseteq f_d(R_d^{\subseteq}(x))\}$，得 $R_A^{\subseteq}(x)\subseteq R_d^{\subseteq}(x)$；

$\Rightarrow$ 由 $R_A^{\subseteq}(x)\subseteq R_d^{\subseteq}(x)$，得 $\partial_A(x)=f_d(R_A^{\subseteq}(x))\subseteq f_d(R_d^{\subseteq}(x))\}$.□

2 多尺度集值决策信息系统

多尺度决策信息系统由 Wu-Leung 于文 [18] 首次提出，在该文中，假设属性集中的所有属性都有 I 个等级尺度，一个多尺度信息系统可以表示为

$$(U,\{a_j^k|k=1,2,\cdots,I,j=1,2,\cdots,m\}).$$

其中 $a_j^k:U\to V_{a_j^k}$ 为一个满射，$V_{a_j^k}$ 是 a_j 在第 k 层粒度标记下的值域. 对于 $1\leqslant k\leqslant I-1$，存在满射 $g_{a_j}^{k,k+1}:V_{a_j^k}\to V_{a_j^{k+1}}$，使得 $a_j^{k+1}=g_{a_j}^{k,k+1}\circ a_j^k$，其中 $g_{a_j}^{k,k+1}$ 称为粒度转换函数.

文 [18] 所指多尺度信息系统一个属性有多个尺度，每个尺度对应的属性都构成论域的划分，任意属性 $a\in A$，根据粒度转换函数 $g_a^{k,k+1}$ 的定义，$\forall x\in U$，有 $[x]_{a^1}\subseteq[x]_{a^2}\subseteq\cdots,[x]_{a^I}$，也就是说随着尺度的减少，信息粒度是逐渐变精细的，这反映了人们认识事物由粗到精，由浅到深的过程.

2.1 多尺度集值决策信息系统

但在具体的应用中，对象对应的属性值可以是多值的，由此我们提出多尺度集值信息系统的概念.

定义 5 设 (U,A,F) 为多尺度集值信息系统，其中 $U=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是非空有限集合，称为论域，$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 是非空有限条件属性集，属性 a_j 有 I_j 个尺度 $a_j^1,a_j^2,\cdots,a_j^{I_j}(j=1,2,\cdots,m)$，$f_{a_j^k}:U\to P_0(V_{a_j^k})$ 是一个映射，其中 $V_{a_j^k}$ 是属性 a_j^k 的值域，$1\leqslant k\leqslant I_j-1$，这里 $P_0(V_{a_j^k})$ 表示 $V_{a_j^k}$ 的非空子集的全体，$F=\{f_{a_j^k}|k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\}$，且存在从 $V_{a_j^k}$ 到 $V_{a_j^{k+1}}$ 的满射映射 $g_{a_j}^{k,k+1}:V_{a_j^k}\to V_{a_j^{k+1}}$，使得 $f_{a_j^{k+1}}=g_{a_j}^{k,k+1}\circ f_{a_j^k}$，即 $f_{a_j^{k+1}}(x)=g_{a_j}^{k,k+1}(f_{a_j^k}(x))$ 对任意的 $x\in U$ 都成立，$g_{a_j^{k,k+1}}$ 称为从 a_j^k 到 a_j^{k+1} 的粒度转换函数.

定理 2 设 (U,A,F) 为多尺度集值信息系统，则有如下结论成立.

(1).$|V_{a_j^{k+1}}|\leqslant|V_{a_j^k}|$;

(2).$\forall w\in V_{a_j^{k+1}},x\in(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)$，存在 $v\in V_{a_j^k}$，$x\in(f_{a_j^k})^{-1}(v)$, 使得 $(f_{a_j^k})^{-1}(v)\subseteq(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)$;

(3). 对任意的 $w\in V_{a_j^{k+1}}$，存在 $V_0\subseteq V_{a_j^k}$，使得 $(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)=(f_{a_j^k})^{-1}(V_0)=\cup_{v\in V}(f_{a_j^k})^{-1}(v)$.

证明 (1). 根据满射 $g_{a_j}^{k,k+1}$ 的定义，直接可得；

(2).$\forall w\in V_{a_j^{k+1}}$，有 $w\in f_{a_j^k}(x)$，由 $g_{a_j}^{k,k+1}(f_{a_j^k}(x))=f_{a_j^{k+1}}(x)$，故 $\exists v\in f_{a_j^k}(x)$，使得 $w=g_{a_j}^{k,k+1}(v)$，所以 $x\in(f_{a_j^k})^{-1}(v)$. 并且对 $\forall y\in(f_{a_j^k})^{-1}(v)$，有 $v\in f_{a_j^k}(y)$，由于 $g_{a_j}^{k,k+1}(f_{a_j^k}(y))=f_{a_j^{k+1}}(y)$，以及 $g_{a_j}^{k,k+1}(v)=w$，可得 $w\in f_{a_j^{k+1}}(y)$，所以 $y\in(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)$，所以 $(f_{a_j^k})^{-1}(v)\subseteq(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)$.

(3). 任意的 $\forall w\in V_{a_j^{k+1}}$，令 $V_0=(g_{a_j^{k,k+1}})^{-1}(w)$，则有 $(g_{a_j^{k,k+1}})(V_0)=w$ 和 $(g_{a_j^{k,k+1}})^{-1}(w)=V_0$，任意的 $x\in(f_{a_j^k})^{-1}(V_0)$，存在 $v\in V_0$，使得 $x\in(f_{a_j^k})^{-1}(v)$，所以 $v\in(f_{a_j^k})(x)$，由 $(g_{a_j^{k,k+1}})(v)=w$，所以 $w\in(f_{a_j^{k+1}})(x)$，故 $x\in(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)$，所以 $(f_{a_j^k})^{-1}(V_0)\subseteq(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)$. 另一方面，对任意的 $x\in(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)$，有 $w\in(f_{a_j^{k+1}})(x)$，由 $(g_{a_j^{k,k+1}})^{-1}(w)=V_0$，存在 $v\in V_0$，使得 $v\in(f_{a_j^k})(x)$，所以 $x\in(f_{a_j^k})^{-1}(v)$，所以 $x\in(f_{a_j^k})^{-1}(V_0)$，所以 $(f_{a_j^{k+1}})^{-1}(w)\subseteq(f_{a_j^k})^{-1}(V_0)$. □

多尺度集值信息系统 (U,A,F) 可以表示为 $(U,\{a_j^k,f_{a_j^k}|k=1,2,\cdots,I_j,j=1,2,\cdots,m\})$，如果每个属性 $a_j^k(1\leqslant l_j\leqslant I_j,j=1,2,\cdots,m)$ 都构成 U 的一个划分，上述定义就是 Wu-Leung 与 Li-Hu 在文 [18][19] 中提到的多尺度信息系统.

若 a_j 选取第 $l_j(1\leqslant l_j\leqslant I_j,j=1,2,\cdots,m)$ 尺度，称 $K=(l_1,l_2,\cdots,l_m)$ 为系统的一个尺度组合，系统所有尺度组合的全体记为 $\sum$. 对应尺度组合 $K=(l_1,l_2,\cdots,l_m)\in\sum$ 的集值信息系统记为 (U,A^k,F^k)，其中

$$A^k=(a_1^{l_1},a_2^{l_2},\cdots,a_m^{l_m}),F^k=(f_{a_1^{l_1}},f_{a_2^{l_2}},\cdots,f_{a_m^{l_m}}).$$

例 1 某公司计划从能力和素质两个指标对管理人员进行评价，能力指标收集的数据有: 决策/真诚/信用/用人/沟通/合作；素质指标收集的数据有: 知识/思想/品德/性格/气质/风度. 为了减少评价的复杂性，在收集数据的基础上可以构造更加抽象的评估指标. 能力的二级指标为决策/诚信/用人/交流，一级指标为决断型/协调型；而素质的二级指标为知识/品质/性格/气度，一级指标则为德才型/交际型. 因此评价的决策可以借助构造一个多尺度集值信息系统 $S=(U,A,F)$ 来进行处理. 如表 1 所示，这里 $A=\{a_1,a_2\}$ ={能力，素质}.

a_1 分为三个尺度 a_1^1,a_1^2,a_1^3，其中 $V_{a_1^1}=\{1,2,3,4,5,6\}$ ={决策, 真诚, 信用, 用人, 沟通, 合作}，$V_{a_1^2}=\{A,B,C,D\}$ ={决策, 诚信, 用人, 交流}，$V_{a_1^3}=\{U,V\}$ ={决断型, 协调性}.

a_2 也分为三个尺度 a_2^1,a_2^2,a_2^3，其中 $V_{a_2^1}=\{1,2,3,4,5,6\}$ ={知识, 思想, 品德, 性格, 气质, 风度}，$V_{a_2^2}=\{A,B,C,D\}$ ={知识, 品质, 性格, 气度}，$V_{a_2^3}=\{U,V\}$ ={德才型, 交际型}.

上述中把能力一级指标中真诚和信用综合考虑为诚信，沟通和合作综合考虑为交流；把二级指标中的决策和诚信综合考虑为决断型，用人和交流综合考虑为协调型. 把素质一级指标中的思想和品德综合考虑为品质，把气质和风度综合考虑为气度；把二级指标中的把知识和品质综合为德才型，把气质和风度综合考虑为交际型.

如果 $i\in f_{a_1^1}(x)$，则员工 x 在标准 a_1^1 上的第 i 项指标合格，否则称员工 x 在标准上的第 i 项能力不足，如 $f_{a_1^1}(x_1)=\{1,2,3\}$，则员工 x_1 在标准 a_1^1 上的决策、真诚、信用的能力合格，而用人、沟通及合作的能力不足. 其余尺度标准类似. 对 $j=(1,2)$，有

$$g_{a_j^{1,2}}:V_{a_j^1}\to V_{a_j^2},g_{a_j^{1,2}}(v)=\begin{cases}A,v=1\\B,v=2,3\\C,v=4\\D,v=5,6\end{cases}$$

$$g_{a_j^{2,3}}:V_{a_j^2}\to V_{a_j^3},g_{a_j^{2,3}}(w)=\begin{cases}U,w=A,B\\V,w=C,D\end{cases}$$

$$f_{a_j^2}(x)=g_{a_j^{1,2}}(f_{a_j^1}(x))=\begin{cases}A,a_j^1(x)=1\\B,a_j^1(x)=2,3\\C,a_j^1(x)=4\\D,a_j^1(x)=5,6\end{cases}$$

$$f_{a_j^3}(x)=g_{a_j^{2,3}}(f_{a_j^2}(x))=\begin{cases}U,a_j^2(x)=A,B\\V,a_j^2(x)=C,D\end{cases}$$

如 $f_{a_1^2}(x_1)=g_{a_1^{1,2}}(f_{a_1^1}(x_1))(1,2,3)=\{A,B\}$，表示员工 x_1 在测试中，决策合格，真诚和信用至少一者合格.

表 1　多尺度集值信息系统

Table 1.Multi scale set-valued information systems

U	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_2^3
x_1	1,2,3	A,B	U	2,3,4	B,C	U,V
x_2	3,4,6	B,C,D	U,V	2,4	B,C	U,V
x_3	3,5,6	B,D	U,V	1,3,4	A,B,C	U,V
x_4	5,6	D	V	1,2,3	A,B	U
x_5	2,3,4	B,C	U,V	5,6	D	V
x_6	3,4,5	B,C,D	U,V	4,5,6	C,D	V
x_7	1,3	A,B	U	3,5	B,D	U,V
x_8	1	A	U	5,6	D	V

2.2 多尺度集值信息系统的粗糙近似

定义 6 设多尺度集值信息系统 (U,A,F) 的尺度组合的全体为 $\sum$，$K=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\},L=\{l_1,l_2,\cdots,l_m\}\in\sum$, 若 $k_j\leqslant l_j(j=1,2,\cdots,m)$，则称尺度组合 K 细于尺度组合 L，记为 $K\leqslant L$，若 $K\leqslant L$，且至少存在一个 $p\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $k_p<l_p$，则称 K 严格细于 L，记为 $K<L$.

根据优势关系的定义以及粒度转换函数的关系，容易得出以下定理

定理 3 设 (U,A,F) 为多尺度集值信息系统，$B,C\in A$，$K,L\in\sum$，则有.

(1). $R^{\subseteq}_{A^K}=\bigcap_{a\in A^K}R^{\subseteq}_{a}$;

(2). $B\subseteq C\subseteq A\Rightarrow R^{\subseteq}_{A^K}\subseteq R^{\subseteq}_{C^K}\subseteq R^{\subseteq}_{B^K}$;

(3). $y\in R^{\subseteq}_{A^K}(x)\Rightarrow R^{\subseteq}_{A^K}(y)\subseteq R^{\subseteq}_{A^K}(x)$;

(4). 任意 $a\in A^K$，$x,y\in U$，如果 $f_a(x)=f_a(y)$ 则有 $R^{\subseteq}_{A^K}(x)=R^{\subseteq}_{A^K}(y)$;

(5).$K<L$,$B\subseteq A\Rightarrow R^{\subseteq}_{B^K}\subseteq R^{\subseteq}_{B^L}$.

证明 $(1-4)$ 由定义 1 直接可得;

(5). 设 $K=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$，$L=\{l_1,l_2,\cdots,l_m\}$，由于 $K<L$，所以 $k_j\leqslant l_j(j=1,2,\cdots,m)$，由粒度转换函数的定义，存在从 $V_{a_j^{k_j}}$ 到 $V_{a_j^{l_j}}$ 的满射 $g_{a_j}^{k_j,l_j}$，使得 $g_{a_j}^{k_j,l_j}\circ f_{a_j^{k_j}}=f_{a_j^{l_j}}$. 任意的 $x\in U$ 及 $y\in R^{\subseteq}_{B^K}(x)$，满足对任意的 $a_j^{k_j}\in B^K$，有 $f_{a_j^{k_j}}(x)\subseteq a_j^{k_j}(y)$，所以 $g_{a_j}^{k_j,l_j}(f_{a_j^{k_j}}(x))\subseteq g_{a_j}^{k_j,l_j}(f_{a_j^{k_j}}(y))$ 从而 $f_{a_j^{l_j}}(x)\subseteq f_{a_j^{l_j}}(y)$，所以 $y\in R^{\subseteq}_{B^L}(x)$，因此 $R^{\subseteq}_{B^K}(x)\subseteq R^{\subseteq}_{B^L}(x)$，由 $x\in U$ 的任意性，所以 $R^{\subseteq}_{B^K}\subseteq R^{\subseteq}_{B^L}$.□

定理 4 (U,A,F) 为多尺度集值信息系统，则.

(1).$\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(\emptyset)=\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(\emptyset)=\emptyset,\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(U)=\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(U)=U$

(2).$\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X)$;

(3).$X_1\subseteq X_2\Rightarrow\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1)\subseteq\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_2)$,
$\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1)\subseteq\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_2)$;

(4).$\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1\bigcap X_2)=\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1)\bigcap\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_2)$
$\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1\bigcup X_2)=\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1)\bigcup\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_2)$;

(5).$\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1\bigcup X_2)\supseteq\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1)\bigcup\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_2)$
$\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1\bigcap X_2)\subseteq\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_1)\bigcap\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X_2)$;

(6).$\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X),\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(\sim X)=\sim\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X)$;

(7).$K,L\in\sum,K<L$，则有

$\underline{R^{\subseteq}_{A^L}}(X)\subseteq\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X),\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X)\subseteq\overline{R^{\subseteq}_{A^L}}(X)$.

证明 $(1-5)$ 显然成立；

(6). 任意的 $x\in\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(\sim X)$，有 $R^{\subseteq}_{A^K}(x)\subseteq(\sim X)$，得 $R^{\subseteq}_{A^K}(x)\cap X=\emptyset$，故 $\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X)$,，同理，可得 $\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(\sim X)=\sim\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(X)$.

(7). 由定理 3(5) 可得结论成立.□

2.3 多尺度集值决策信息系统

定义 7 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 为多尺度集值决策信息系统，其中 (U,A,F) 是多尺度集值信息系统，(U,d,g) 是单尺度集值信息系统，A 称为条件属性集，d 为决策属性，$g:U\to P_0(V_d)$ 是一个映射，V_d 为 d 的值域，$P_0(V_d)$ 为 V_d 的非空子集全体.

设 (U,A,F) 的全体尺度组合为 $\sum$，则 $K=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}\in\sum$ 对应集值决策信息系统记为 $S^K=(U,A^K,F^K,d,g)$

$=(U,\{a_1^{l_1},a_2^{l_2},\cdots,a_m^{l_m}\},\{f_{a_1^{l_1}},f_{a_2^{l_2}},\cdots,f_{a_m^{l_m}}\},d,g)$.

定理 5 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 为多尺度集值决策信息系统，$K,L\in\sum,K<L$，则以下结论成立.

(1).$\forall x\in U,\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(R^{\subseteq}_d(x))\subseteq R^{\subseteq}_d(x)\subseteq\overline{R^{\subseteq}_{A^K}}(R^{\subseteq}_d(x))$;

(2).$\forall x\in U,\underline{R^{\subseteq}_{A^L}}(R^{\subseteq}_d(x))\subseteq\underline{R^{\subseteq}_{A^K}}(R^{\subseteq}_d(x))$,

(3).$\forall x\in U,\overline{R^{\subseteq}_{A^L}}(R^{\subseteq}_d(x))\subseteq\overline{R^{\subseteq}_{A^L}}(R^{\subseteq}_d(x))$,

(4).$Pos_{A^L}(d)\subseteq Pos_{A^K}(d)$;

(5).$\partial_{A^K}(x)\subseteq\partial_{A^L}(x)$.

证明 由定理 3 直接可得，$(1-3)$ 成立；由 $K<L\Rightarrow R_{A^K}\subseteq R_{A^L}$ 可得 (4-5) 成立.□

定理 5 说明，随着尺度的加细，条件属性集表达的知识精度越来越高，系统的决策能力越来越好.

3 多尺度集值决策信息系统最优尺度选择

设 $S=(U,A,F,d,g)$ 是多尺度集值决策信息系统，对应较细尺度组合的多尺度集值决策信息系统所表达的知识的精度较高，但了解知识所需要花费的精力也较大，而对应较粗的尺度组合所表达的知识比较粗糙，但是了解知识所需要花费的精力也较小. 在具体的应用过程中，我们希望利用较少信息得到理想的决策. 由此，提出多尺度集值决策信息系统的最优尺度选择.

3.1 协调的情况

由局部协调和广义决策的定义，易得如下定理.

定理 6 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 为多尺度集值决策信息系统，$K\in\sum$，$x\in U$，则以下结论等价：

(1).S^K 关于 x 是局部协调的;

(2).$R^{\subseteq}_{A^K}(x)\subseteq R^{\subseteq}_d(x)$,

(3).$\partial_{A^K}(x)\subseteq f_d(R^{\subseteq}_d(x))$.

由正域的定义，容易得到以下定理.

定理 7 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 为多尺度集值决策信息系统，$K\in\sum$，则以下结论等价：

(1).S^K 是协调的;

(2).$\forall x\in U,S^K$ 关于 x 是局部协调的;

(3).$Pos_{A^K}(d)=U$.

由 $K<L\Rightarrow R_{A^K}\subseteq R_{A^L}$ 可得如下定理.

定理 8 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 为多尺度集值决策信息系统，$K,L\in\sum,K<L$，则以下结论成立：

(1). 若 S^K 关于 x 是局部协调的，

则 S^L 关于 x 也是局部协调的;

(2). 若 S^K 是协调的，则 S^L 也是协调的.

定义 8 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 为多尺度集值决策信息系统，若 S^{K_0} 是协调的，则称系统 S 是协调的，若存在 $K\in\sum$，使得 S^K 是协调的，但对任意的 $L\in\sum,K<L$，S^L 是不协调的，则称 K 是保持系统协调的最优尺度组合.

定义 9 设 $S=(U,A,F,d,g)$ 为多尺度集值决策信息系统，$K=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$, 定义

$$sig(K)=\frac{|Pos_{A^K}(d)|}{|U|}.$$

为尺度组合 K 的重要度.

以下我们利用上述尺度组合重要度定义，给出一个选择算法，我们的方法是从最粗的尺度组合往较细的尺度组合逐步检验，每一个尺度层面都选择尺度重要度最大的分支，理由是该分支最靠近我们选择的目标. 并且，由于对象在较细的尺度组合下的优势类包含于较粗尺度组合下的优势类，所以如果对象在较粗的尺度组合下是局部协调的，则在较细的尺度组合下必然也是局部协调的，所以在每一次尺度组合检验中，协调的对象在其后继尺度组合的检验中都可以去掉而不必再检验，基于这个思想，如下算法 1 给出的最优尺度组合的选择算法.

算法 1. 协调的多尺度集值决策信息系统的最优尺度

输入：协调的多尺度集值决策信息系统 $S=(U,A,F,d,g)$

输出：最优尺度组合 K.

step 1: Calculate$R^{\subseteq}_d$
step 2: $Kset\leftarrow NULL$
step 3: For each $j\in\{1,2,\cdots,m\}$
step 4: $l_j\leftarrow I_j$ //l_j 是属性 a_j 的最粗尺度
step 5: Endfor
step 6: $K_0\leftarrow\{l_1,l_2,\cdots,I_m\}$ //构造最粗尺度组合 K_0
step 7: $Kset.put(K_0)$ // 将 K_0 加入集合 $Kset$
step 8: $oSig\leftarrow 0$ // 设置初始值
step 9: $oK\leftarrow NULL$
step 10: $oPOS\leftarrow NULL$
step 11: While($U\neq\emptyset$)
step 12: While($Kset\neq NULL$)
step 13: $K\leftarrow Kset.get()$ //从 $Kset$ 中取出一个 K
step 14: Calculate$Pos_{A^K}(d)$
step 15: $Sig=|Pos_{A^K}(d)|/|U|$
step 16: If($oSig\leqslant Sig$)//当前 Sig 较大则用新值替换
step 17: $oSig\leftarrow Sig$
step 18: $oK\leftarrow K$
step 19: $oPOS\leftarrow Pos_{A^K}(d)$
step 20: Endif
step 21: EndWhile //$oSig$ 为 1，则 oK 最优，结束返回
step 22: If($oSig==1$)

step 23: return oK
step 24: EndIf
step 25: $U \leftarrow U - oPOS$ //修改 U
step 26: $(l_1, l_2, \cdots, l_m) \leftarrow oK$
step 27: For each $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$//对每一个属性的
step 28: If $(l_j > 1)$//较细 1 级尺度分别构造组合 K
step 29: $K \leftarrow (l_1, l_2, \cdots, l_{j-1}, l_{j+1}, \cdots, l_m)$
step 30: $Kset.Put(K)$//放入集合等待下一批计算
step 31: EndIf
step 32: EndFor
step 33: EndWhile

根据上述的算法，在计算过程中论域是逐渐缩小的，即从上到下，逐层搜索，在每个搜索到的尺度组合 K 下，计算 $Pos_{A^K}(d)$，然后在下一层的检验中，就不必检验 $Pos_{A^K}(d)$ 中的对象，所以论域就可以缩小到 $U - Pos_{A^K}(d)$，这样逐层搜索，逐层求出正域，在下一层的搜索的论域，就可以把这个正域去掉，这样，对应的尺度越来越小，论域越来越小，直到论域为零，对应的尺度组合就是系统的一个最优尺度组合.

并且，在对应尺度组合为的搜索检验中，就是对应的正域中的对象的一个局部协调最优尺度组合

例 2 求由表 2 确定的多尺度集值决策信息系统的最优尺度组合.

根据表 1 测试的结果，公司对员工进行评测，评测结论分为四个类型，用决策属性 d 表示，即 $V_d = \{1, 2, 3, 4\}$，得到多尺度决策集值信息系统 $S = (U, A, F, d, g)$，如表 2 所示. 对于员工 x，如果 $R^{\subseteq}_{A^K}(x) \subseteq R^{\subseteq}_{d}(x)$，则说明在尺度组合 K 上，员工 x 的类型完全确定，否则，说明在尺度组合 K 上，员工 x 的类型不能确定.

表 2 多尺度集值决策信息系统

Table 2.Multi scale set-valued decision information systems

U	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_2^3	d
x_1	1,2,3	A, B	U	2,3,4	B, C	U, V	1
x_2	3,4,6	B, C, D	U, V	2,4	B, C	U, V	1
x_3	3,5,6	B, D	U, V	1,3,4	A, B, C	U, V	2
x_4	5,6	D	V	1,2,3	A, B	U	2
x_5	2,3,4	B, C	U, V	5,6	D	V	3
x_6	3,4,5	B, C, D	U, V	4,5,6	C, D	V	3
x_7	1,3	A, B	U	3,5	B, D	U, V	4
x_8	1	A	U	5,6	D	V	4

经计算 $R^{\subseteq}_{A^{(1,1)}}(x_i) = x_i$，所以系统是协调的，

1. 对于最粗的尺度组合 $K = (3, 3)$，经计算论域中任意对象都是局部不协调的，所以 $Pos_{A^K}(d) = \emptyset$，$sig(K) = 0$；
2. $U_{(3,3)} = U - Pos_{A^K}(d) = U$，对于尺度组合 $(2, 3)$，经计算，$Pos_{A^{(2,3)}}(d) = \{x_2\}$，$sig(2, 3) = 1/8$；对于尺度组合 $(3, 2)$，经计算 $Pos_{A^{(3,2)}}(d) = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$，$sig(3, 2) = 5/8$；所以沿着尺度组合 $(3, 2)$ 的直接后继尺度需求最优尺度组合；
3. $U_{(3,2)} = U - Pos_{A^{(3,2)}}(d) = \{x_1, x_2, x_8\}$，对于尺度组合 $(2, 2)$，经计算 $Pos_{A^{(2,2)}}(d) = U$，$sig(2, 2) = 1$，所以尺度组合 $(2, 2)$ 最优尺度组合.

上述例 1 和例 2 所描述的员工类型评测中，可以根据数量较小的二级指标的测试数据来进行计算，也同样可保证员工类型评测的准确性，减少了计算工作量

3.2 不协调的情况

3.2.1 保正域的最优尺度组合选择

定义 10 设 $S = (U, A, F, d, g)$ 为多尺度集值决策信息系统，若存在 $K \in \sum$，使得 $Pos_{A^K}(d) = Pos_{A^{K_0}}(d)$，且对任意的 $L \in \sum$，$K < L$，有 $Pos_{A^L}(d) \subset Pos_{A^{K_0}}(d)$，则称 K 是保正域不变的最优尺度组合.

由于我们的目标是保正域不变，因此，在最细的尺度组合下局部不协调的对象我们不需要去考虑，所以，我们先计算出在最细的尺度组合下的正域 $Pos_{A^{K_0}}(d)$，然后，令 $U' = Pos_{A^{K_0}}(d)$，则新的系统 $S' = (U', A, F, d, g)$ 是协调的，然后，应用算法 1 方法，找出系统 S' 的一个最优尺度组合 K，则 K 也是系统 S 保正域不变的一个最优尺度组合.

3.2.2 保广义决策不变的最优尺度组合选择

定义 11 设 $S = (U, A, F, d, g)$ 为不协调的多尺度集值决策信息系统，$x \in U$，若满足:

(1) 存在 $K \in \sum$，使得 $\partial_{A^K}(x) = \partial_{A^{K_0}}(x)$;

(2) 任意 $L \in \sum$，$K < L$，有 $\partial_{A^{K_0}}(x) \subset \partial_{A^L}(x)$. 则称 K 是对象 x 保广义决策不变的最优尺度组合.

如果 (1)，(2) 条件对 $\forall x \in U$ 都满足，则称 K 是系统 S 保广义决策不变的最优尺度组合.

定义 12 设 $S = (U, A, F, d, g)$ 为不协调的多尺度集值决策信息系统，$K \in \sum$，令

$$Por_{A^K}(d) = \{x \in U | \partial_{A^K}(x) = \partial_{A^{K_0}}(x)\}.$$

定义尺度组合 K 的重要度为

$$SIG(K) = \frac{|Por_{A^K}(d)|}{|U|}.$$

类似于算法 1 的方法，得出如下保广义决策不变的最优尺度组合的算法.

算法 2. 不协调的多尺度集值决策信息系统保广义决策不变的最优尺度组合

输入：不协调多尺度集值决策信息系统 $S = (U, A, F, d, g)$

输出：最优尺度组合 K.

step 1: Calculate$\partial_{A^{K_0}}$
step 2: $Kset \leftarrow NULL$
step 3: For each $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$
step 4: $l_j \leftarrow I_j$ //l_j 是属性 a_j 的最粗尺度
step 5: Endfor
step 6: $K_0 \leftarrow \{l_1, l_2, \cdots, I_m\}$ //构造最粗尺度组合 K_0
step 7: $Kset.put(K_0)$ // 将 K_0 加入集合 $Kset$
step 8: $oSig \leftarrow 0$ // 设置初始值
step 9: $oK \leftarrow NULL$
step 10: $oPOR \leftarrow NULL$
step 11: While$(U \neq \emptyset)$
step 12: While$(Kset \neq NULL)$
step 13: $K \leftarrow Kset.get()$ //从 $Kset$ 中取出一个 K

step 14: Calculate$Por_{A^K}(d)$
step 15: $Sig = |Por_{A^K}(d)|/|U|$
step 16: If($oSig \leqslant Sig$)//当前 Sig 较大则用新值替换
step 17: $oSig \leftarrow Sig$
step 18: $oK \leftarrow K$
step 19: $oPOR \leftarrow Por_{A^K}(d)$
step 20: Endif
step 21: EndWhile //$oSig$ 为 1，则 oK 最优，结束返回
step 22: If($oSig == 1$)
step 23: return oK
step 24: EndIf
step 25: $U \leftarrow U - oPOR$ //修改 U
step 26: $(l_1, l_2, \cdots, l_m) \leftarrow oK$
step 27: For each $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$//对每一个属性的
step 28: If ($l_j > 1$)//较细 1 级尺度分别构造组合 K
step 29: $K \leftarrow (l_1, l_2, \cdots, l_{j-1}, l_{j+1}, \cdots, l_m)$
step 30: $Kset.Put(K)$//放入集合等待下一批计算
step 31: EndIf
step 32: EndFor
step 33: EndWhile

例 3 求下列多尺度集值决策信息系统的保广义决策不变的最优尺度组合.

表 3 多尺度集值决策信息系统

Table 3.Multi scale set-valued decision information systems

U	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_2^3	d
x_1	3,4,5	B, C, D	U, V	1,2	A, B	U	1
x_2	2,3,4	B, C	U	1,3,6	A, B, D	U, V	1
x_3	1,3	A, B	U	3,5	B, D	U, V	1
x_4	1,3,4	A, B, C	U	3,5,6	B, D	U, V	2
x_5	5,6	D	V	3,4	B, C	U, V	2
x_6	2,3,5	B, D	U, V	1,4,6	A, C, D	U, V	2
x_7	2,3,5	B, D	U, V	1,4,6	A, C, D	U, V	0
x_8	3,5,6	B, D	U, V	4,5,6	B, D	U, V	0

U	$\partial_{A(1,1)}$	$\partial_{A(3,3)}$	$\partial_{A(2,3)}$	$\partial_{A(3,2)}$	$\partial_{A(2,2)}$
x_1	1	1,2,0	1	1	1
x_2	1	1,2,0	1,2	1	1
x_3	1,2	1,2,0	1,2	1,2,0	1,2
x_4	2	1,2,0	2	1,2,0	2
x_5	2	1,2,0	1,2,0	2	2
x_6	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
x_7	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
x_8	0	2,0	2,0	0	0

上述表格中算出 $\partial_{A^{1,1}}$，然后根据定义 12，从粗到细，各个尺度组合的广义决策与 $\partial_{A^{1,1}}$ 进行比较，比较各个尺度组合重要度，直到重要度为 1，参照上述表格，经计算

1. 对于最粗的尺度组合 $K = (3,3), Por_{A(3,3)}(d) = \{x_6, x_7\}, sig(3,3) = \frac{1}{4}, U_{(3,3)} = U - Por_{A(3,3)}(d) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_8\}$；

2. 对于尺度组合 $(3,3)$，同理可算得 $Por_{A(2,3)}(d) = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}$，$sig(3,3) = \frac{5}{8}$，对于尺度组合 $(3,2)$，同理可算得 $Por_{A(3,2)}(d) = \{x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8\}$，$sig(3,2) = \frac{3}{4}$，故沿着尺度组合 $(3,2)$ 的直接后继尺度需求最优尺度组合；

3. $U_{(3,2)} = U - Por_{A(3,2)}(d) = \{x_3, x_4\}$，对于尺度组合 $(2,2)$，同理 $Por_{A(2,2)}(d) = U$，$sig(3,2) = 1$，所以尺度组合 $(2,2)$ 是最优尺度组合.

4 结论

本文将多尺度信息系统的粒度转换函数推广引入到集值信息系统中，构造了多尺度集值信息系统的粒计算模型，研究该模型各尺度的粒结构、粗糙近似，以及各尺度间的粒度关系. 在此基础上，引入多尺度集值决策信息系统，研究该系统的协调性，提供最优尺度选择的方法并给出具体的算例. 本文推广了多尺度决策信息系统的理论框架. 未来，我们将研究多尺度集值决策信息系统的规则提取和动态的多尺度集值信息系统模型.

参考文献 (References)

[1] L.A. Zadeh. Fuzzy sets and information granularity [J]. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North-Holland , Amsterdam, 1979, 3-18.

[2] Yao Y Y. Information granulation and rough set approximation[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2001, 16: 87-104.

[3] Zhang G Q , Li Z W , Wu W Z , el at. Information structures and uncertainty measures in a fully fuzzy information system[J]. International Journal of Approximate Reasoning , 2018, 101: 119-149.

[4] Pawlak. Z. Rough set [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356.

[5] Pawlak. Z. Rough set [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356.

[6] Tan A H, Wu W Z, Tao Y Z. A unified framework for characterizing rough sets with evidence theory in various approximation spaces[J]. Information Sciences , 2018, 455: 144-160.

[7] Lin Y D, Li J J, Tan A H, et al.Granular matrix-based knowledge reductions of formal fuzzy contexts[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11: 643-656.

[8] Li J H, Mei C L, Xu W H, et al. Concept learning via granular computing: a cognitive viewpoint[J]. Information Sciences , 2015, 298 (20) :447-467 .

[9] Qian Y H, Li S Y, Liang J Y, et al. Pessimistic rough set based decisions: A multi-granulation fusion strategy[J]. Information Sciences, 2014, 264:196-210.

[10] Pawlak Z. Drawing conclusions from data- the rough set way[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2001,16 :3-11.

[11] Yao Y Y, N. Noroozi. A unified model for set-based computations, in Proc. 3rd Int. Workshop Rough Sets Soft Comput., T. Y. Lin and A. M. Wildberger, Eds. San Jose, CA, USA: San Jose State Univ., 1994, pp. 236–243.

[12] Guan Y Y, Wang H K. Set-valued information Systems [J]. Information Sciences, 2006, 176(17):2507-2525.

[13] 宋笑雪，解争龙，张文修. 集值决策信息系统的知识约简与规则提取 [J]. 计算机学报，2007，34(4):182-185.
(Song X X, Xue Z L, Zhang W X. Knowledge Reduction

and Rule Extraction in Set-valued Decision Information System [J]. Chinese Journal of Computers, 2007, 34(4): 182-185.)

[14] Luo C, Li T R, Chen H M, el at. Fast algorithms for computing rough approximations in set-valued decision systems while updating criteria values[J]. Information Sciences, 2015, 299: 221-242.

[15] Yan Y, Huang Y Y, Li T R, el at. Dynamic variable precision rough set approach for probabilistic set-valued information systems[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 122: 131-147.

[16] Dai J H, Tian H W. Entropy measures and granularity measures for set-valued information systems [J]. Information Sciences, 2013, 240:72-82.

[17] 庄颖，刘文奇，范敏，李金海. 集值信息系统上的多粒度优势关系和信息融合 [J]. 模式识别与人工智能，2015，28(8) : 741-749.
(Zhuang Y, Liu W Q, Fan M, et al. Multi-granulation Dominance Relation and Information Fusion Based on Set-Valued Information System[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2015, 28(8): 741-749.)

[18] 马睿，刘文奇. 基于集值信息系统的多粒度粗集 [J]. 系统工程与电子技术，2014 ，36(5) : 920-925.
(Ma R, Liu W Q. Multi-granulation rough set model based on set-valued information system [J]. System Engineering and Electronics, 2014, 36(5): 920-925.)

[19] Wu W Z, Yee Leung. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2011, 181: 3878-3897.

[20] Li F, Hu B Q. A new approach of optimal scale selection to multi-scale decision tables [J]. Information Sciences, 2017, 347: 193-208.

[21] Huang Z H, Li J J, Dai W Z, el at. Generalized multi-scale decision tables with multi-scale decision attributes [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2019, 115: 194-208.

[22] Xu W H, Wang Q R, Zhang X T. Multi- granulation rough sets based on tolerance relations [J]. Soft Computing, 2013, 17(7):1241-1252.

[23] 顾沈明，吴伟志，徐优红. 不完备多标记信息系统中粒度研究 [J]. 南京大学学报（自然科学），2013，49(5) : 568-573.
(Gu S M, Wu W Z, Xu Y H. On granulation in incomplete multi-labeled information systems [J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2013, 49(5):568-573.)

[24] 吴伟志，陈颖，徐优红，等. 协调的不完备多粒度标记决策系统的最优粒度选择 [J]. 模式识别与人工智能，2016，29(2) : 108-115.
(Wu W Z, Chen Y, Xu Y H, et al. Optimal Granularity Selections in Consistent Incomplete Multi-granular Labeled Decision Systems [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2016, 29(2):108-115.)

[25] Wu W Z, Qian Y H, Li T J, el at. On rule acquisition in incomplete multi-scale decision tables [J]. Information Sciences, 2017, 378: 282-302.

[26] She Y H, Li J H, Yang H L. A local approach to rule induction in multi-scale decision tables [J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 89:398-410.

[27] Li F, Hu B Q, Wang J. Stepwise optimal scale selection for multi-scale decision tables via attribute Significance [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 129: 4-16.

[28] Wan Q, Li J H, Wei L, et al. Optimal granule level Selection: A granule description accuracy viewpoint [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 116: 85-105.

[29] Cheng Y L, Zhang Q H, Wang G Y, et al. Optimal scale selection and attribute reduction in multi-scale decision tables based on three-way decision[J]. Information Sciences, 2020, 541: 36-59.

[30] Li W K, Li J J, Huang J X, et al. A new rough set model based on multi-scale covering [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, . https://doi.org/10.1007/s13042-020-01169-5.

[31] 陈应生，李进金，林荣德，等. 多尺度决策信息系统最优尺度选择的矩阵方法 [J]. 模式识别与人工智能，2020，33(9) : 776-785.
(Chen Y Y, Li J J, Lin R D, et al. Boolean Matrix Approach for Multi-scale Covering Decision Information System[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2020, 33(9):776-785.)

[32] 王加阳，帅勇，张炜. 覆盖多粒度粗糙集的数值特征 [J]. 控制与决策，2020，35(1) : 123-130.
(Wang J Y, Shuan Y, ZhanW. Numerical characterization of multi-granulation covering rough sets [J]. Control and Decision, 2020, 35(1):123-130.)

[33] Xie J P, Yang M H, Li J H, et al. Rule acquisition and optimal scale selection in multi-scale formal decision contexts and their applications to smart city [J]. Future Generation Computer Systems, 2018, 83: 564-581.

[34] Huang B, Wu W Z, Yan J J,et al. Inclusion measure -based multi-granulation decision-theoretic rough sets in multi-scale intuitionistic fuzzy information Tables[J]. Information Sciences, 2020, 507: 421- 448.

作者简介

陈应生 (1976−), 男, 讲师, 硕士, 从事粗糙集和概念格的研究,Email:cyssheng@hqu.edu.cn;

李进金 (1960−), 男, 教授, 博士 (博士生导师), 从事拓扑学, 粗糙集与概念格的研究, E-mail:jinjinlimnu@126.com;

林荣德 (1967−), 男, 副教授, 博士从事人工智能和计算机系统的研究, E-mail: linrd@hqu.edu.cn;

陈东晓 (1977−), 男, 讲师, 硕士从事粗糙集和概念格的研究, E-mail: dxchen@hqu.edu.cn;

黄哲煌 (1980−), 男, 副教授, 博士从事粗糙集和概念格的研究, E-mail: hzh1998@163.com.