

控制与决策

Control and Decision

概率犹豫模糊决策理论与方法综述

徐泽水, 张申

引用本文:

徐泽水, 张申. 概率犹豫模糊决策理论与方法综述[J]. 控制与决策, 2021, 36(1): 42–51.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0465>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑个体累积共识贡献的犹豫模糊语言自适应共识模型

Adaptive consensus model with hesitant fuzzy linguistic information considering individual cumulative consensus contribution

控制与决策. 2021, 36(1): 187–195 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0556>

基于TOPSIS方法改进的多属性决策模型:最小化偏好反转

Modified MCDM model based on TOPSIS method: Minimizing preference reversal

控制与决策. 2021, 36(1): 216–225 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0536>

特征加工链选用规律的挖掘、修正及其在工艺决策中的应用

Mining and correction of selection rule of feature operation chain and their application in process design

控制与决策. 2020, 35(12): 2865–2874 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0367>

考虑时间序列的动态大群体应急决策方法

Dynamic large group emergency decision-making method considering time series

控制与决策. 2020, 35(11): 2609–2618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0088>

基于前景理论和模糊理论的在线多属性采购拍卖 供应商选择决策

Decision method of supplier selection for online multi-attribute procurement auction based on prospect theory and fuzzy theory

控制与决策. 2020, 35(11): 2637–2645 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1768>

概率犹豫模糊决策理论与方法综述

徐泽水[†], 张 申

(四川大学 商学院, 成都 610064)

摘 要: 概率犹豫模糊集是在犹豫模糊集的基础上为每个隶属度添加与之相对应的概率值. 与犹豫模糊集相比, 它可以更加准确和全面地表达专家给出的初始决策信息, 因此, 基于概率犹豫模糊集的决策理论与方法更加可靠且符合实际. 这里对概率犹豫模糊决策理论与方法进行综述. 首先介绍其发展过程; 然后分别对它的信息融合理论、偏好关系理论以及决策方法等进行阐述; 最后展望了概率犹豫模糊决策理论与方法的未来研究方向.

关键词: 概率犹豫模糊集; 信息融合; 偏好关系; 多属性决策; 群决策

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0465

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 徐泽水, 张申. 概率犹豫模糊决策理论与方法综述[J]. 控制与决策, 2021, 36(1): 42-51.

An overview of probabilistic hesitant fuzzy decision-making theory and methods

XU Ze-shui[†], ZHANG Shen

(Business School, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: The probabilistic hesitant fuzzy set adds probability values which are corresponding to each membership degree on the basis of the hesitant fuzzy set (HFS). Compared with the HFS, it can express the initial decision-making information given by experts more accurately and comprehensively. Therefore, the probabilistic hesitant fuzzy decision-making theory and methods are more reliable and practical. This article reviews the probabilistic hesitant fuzzy decision-making theory and methods. It first introduces its development process, then separately expounds its information fusion theory, preference relations theory and decision-making methods, and finally looks forward to the future research directions of the probabilistic hesitant fuzzy decision-making theory and methods.

Keywords: probabilistic hesitant fuzzy sets; information fusion; preference relations; multi-attribute decision-making; group decision-making

0 引 言

决策分析事实上是一种认知过程, 是一个基于决策者的价值观、偏好以及知识结构来确定和选择方案的过程, 它的结果将会导致人们从几种不同的备择方案中选择其中的一种作为自己的理念或下一步的行为方式. 通常而言, 一个完整的决策过程包括明确研究目标、确立研究对象、确定属性值及其权重并采用适当的方法得到备择方案的排序等步骤. 起初, 一些精确的数学模型被应用于决策问题中. 后来, 随着时间的推移, 人们的社会、经济等活动不断丰富, 决策过程中存在的未知因素不断增加且决策问题中所涉及的知识深度和广度逐步提升. 在这种条件下, 这些精准的数学模型已无法满足人们在面对实际决策问题时对于不确定性的刻画的需求. 基于这样的情况,

提出更为有效的信息表达方式并据此解决更为复杂的决策问题是现代决策科学发展的必然要求.

在不断发展新的决策信息表达方式的过程中, 主要存在以下两个困难. 第 1 个是专家主观层面上的模糊性和犹豫性. 其中, 模糊性是指很多时候专家在对目标进行评价时无法给出具体的评估值, 而只能给出一个模糊不清的范围. 针对这一问题, Zadeh^[1]提出的模糊集以及一些后续的模糊集拓展形式给出了较好的解决方案, 可以利用模糊数等模糊信息表达形式代替精确的数来刻画专家给出的初始评估值. 而犹豫性则是指专家在对目标进行评价时, 评估值会在几个可能的值之间犹豫不决. Torra^[2]提出的犹豫模糊集很好地解决了这一问题, 它允许专家在评价时将几个可能的值全部作为隶属度. 而第 2 个困难是不

收稿日期: 2020-04-23; 修回日期: 2020-05-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71771155).

[†]通讯作者. E-mail: xuzeshui@263.net.

同隶属度之间的重要程度不同. 犹豫模糊集允许一个元素中出现多个隶属度,但它默认这些隶属度的重要程度是相同的. 然而,在大多数情况下,由于专家个人的倾向性以及专家数量等原因,不同隶属度具有不同程度的重要性. 为了克服这一困难,概率犹豫模糊集^[1]应运而生,它为每个隶属度添加了一个相应的概率信息,很好地表达了不同隶属度之间不同的重要程度. 这一概念的出现基本解决了决策信息表达所遇到的两个困难. 相应内容将在下一节进行更为详细的阐述.

可以看到,概率犹豫模糊集是在模糊集和它的一些拓展形式的基础上,在原有的以犹豫模糊集为代表的信息表达形式已无法满足日益复杂的实际问题需求的背景下产生的,它的出现符合模糊和不确定信息表达方式的发展方向. 在实际决策过程中,概率犹豫模糊集作为一种切实可行且有效的工具,可以全面、细致地表达和处理决策者的不确定偏好信息,能够很好地提升决策结果的合理性和可信度. 随着社会的快速发展,人们遇到的实际问题日益复杂,用更加符合客观实际和人类思维方式的分析手段来处理复杂定性决策问题的需求更加迫切. 近年来,国内外学者在概率犹豫模糊集的信息融合理论、偏好理论和决策方法等领域已经取得了相当丰富的成果,且已有研究将其应用于风险投资^[4-5]、供应链管理^[6]、运输管理^[7]、舆情预测^[8]等方面. 同时,基于概率犹豫模糊集的决策方法在智慧医疗、水资源管理、能源管理等国家重点发展领域也有着巨大的应用潜力. 因此,对概率犹豫模糊集相关理论及其应用的研究具有重要的理论价值和广泛的实际应用前景. 然而,截至目前为止,尚未见到相关文献对其发展现状做出一个系统的阐述并对其未来研究方向进行展望. 基于此,本文对概率犹豫模糊决策理论与方法进行综述. 首先介绍它的发展过程;然后分别对它的信息融合理论、偏好关系理论以及决策方法进行阐述;最后展望了概率犹豫模糊决策理论与方法的未来研究方向. 希望可以使相关研究方向的学者更加了解这一领域并为他们提供有益的参考,为概率犹豫模糊决策理论与方法的发展做出一定的贡献.

1 概率犹豫模糊集的发展过程

1965年,Zadeh^[1]提出了模糊集的概念用以表达不确定和模糊信息. 其核心思想是把取值为0或1的特征函数拓展到可在单位闭区间 $[0, 1]$ 上任意取值的隶属函数,以此来刻画一个元素隶属于某一集合的程度. 相比于具体的数字,模糊集无疑能够更好地

表达客观事物的不确定性和人们主观认识的模糊性. 然而,随着研究的不断深入,学者们逐渐发现模糊集仅仅包含隶属度信息,只能从一个维度来描述和刻画模糊性,这是不够全面的. 此外,并没有一种明确的方法或途径来分配一个元素对于一个集合的隶属度^[2]. 因此,许多学者从不同角度对模糊集进行了拓展,并得到了 L -型模糊集^[9](L -型模糊集将隶属函数的取值范围拓展成一个完备格(或偏序集))、2-型模糊集^[10](2-型模糊集中的隶属度的取值为模糊集)、区间模糊集^[11](区间模糊集中的隶属度的取值为区间数)等成果. 然而,上述对于模糊信息的表达方式都仅仅丰富和拓展了隶属函数的取值范围,并不能拓宽信息表达的维度. 20世纪80年代,模糊集被进一步拓展,产生了直觉模糊集^[12]和区间直觉模糊集^[13]. 二者除隶属度以外,还考虑了非隶属度和犹豫度两个维度的信息,这使得模糊信息的表达变得更加完整. 随后,学者们逐渐发现,人们在决定一个元素对于某个集合的隶属度时,经常会在两个甚至多个值之间犹豫. 此外,群决策的快速发展使得在很多决策问题中,需要将不同专家的意见合并至同一个信息元素中,而不同专家的意见通常不尽相同. 此时,最好的方法就是将所有可能的取值都列出来以作为隶属度的取值,这就是犹豫模糊集^[2,14]的核心思想.

设 X 是一个非空集合,则定义在 X 上的犹豫模糊集是从 X 到 $[0, 1]$ 上的一个子集的映射^[2]. 其数学表达式^[15]为

$$H = \{ \langle x, h(x) \rangle | x \in X \}, \quad (1)$$

其中 $h(x)$ 是 $[0, 1]$ 的某个子集,包含若干可能的值,表示 $x \in X$ 属于集合 H 的隶属度. 为了表达方便,称 $h = h(x)$ 为一个犹豫模糊元素. 至此,经过几十年的发展,模糊集研究取得的成果越来越丰硕,人们对于模糊信息的表达和刻画也越来越准确和完整.

尽管上述信息表达方式在理论研究和实际应用中取得了较为丰富的成果,特别是犹豫模糊集,但它在决策过程中默认集合内的所有隶属度具有相同的重要程度,这导致专家在给出评估值时无法体现出自己的倾向性. 而且,不同的专家给出相同的评估值时,它们也无法体现每个评估值背后的专家的数量,从而必定会丢失大量的决策信息. 因此,当由于专家的倾向性和数量等原因而导致所给出的评估值有着不同的重要程度或概率时,以上所有的信息表达模型的有效性都会大打折扣. 也就是说,犹豫模糊集以及之前的信息表达方式在描述复杂定性信息方面仍然存在着很大的局限性. 例如:5位专家在奖学金评

定中对某位候选人进行评价,3位专家给出了0.9,一位专家给出了0.8,最后一位专家则给出了0.7.此时,如果用犹豫模糊元素来表达这些评估值,只能得到 $\{0.9, 0.8, 0.7\}$.显然,这个数据并不能完整地表达出决策群体所给出的初始信息,有两位专家给出的信息在信息表达阶段完全被忽略了.

2014年,朱斌^[3]在博士论文中将概率信息应用到犹豫模糊集之中,提出了概率犹豫模糊集和概率犹豫模糊偏好关系的概念.它们的基本组成单位为概率犹豫模糊元素,由取值在 $[0, 1]$ 中的实数形式的评估值和相应的概率构成.在上面的例子中,如果用概率犹豫模糊元素来刻画决策群体给出的信息,可以得到 $\{0.9(0.6), 0.8(0.2), 0.7(0.2)\}$.这样一来,5位专家的意见就被完整而简洁地表达在了同一个元素之中.随后,概率犹豫模糊元素的部分运算法则^[16]和相似性测度^[17]被相继提出,这些成果也被应用于医学诊断等多属性决策问题中.Zhu等^[18]整理了概率犹豫模糊集的相关概念和性质以及概率犹豫模糊偏好关系的定义,并初步研究了概率犹豫模糊偏好关系的一致性.值得注意的是,在这些研究中,都要求同一概率犹豫模糊元素内的所有隶属度所对应的概率之和等于1.事实上,在很多实际决策问题中,这个要求经常无法满足.现在考虑如下情形:有10位专家参与决策,其中有两人因为一些原因无法做出判断,这将导致在用概率犹豫模糊元素表达全体专家的意见时无法得到完整的概率信息.基于此,Zhang等^[19]借助证据推理的思想,减弱了概率信息需要满足的条件,改进了概率犹豫模糊集的定义.

设 X 是一个非空集合,称从 X 到单位闭区间 $[0, 1]$ 上的一个概率分布函数的映射为概率犹豫模糊集^[3, 19].其数学表达式为

$$H = \{ \langle x, h_x(p_x) \rangle | x \in X \}. \quad (2)$$

其中: h_x 是 $[0, 1]$ 的一个子集,表示 $x \in X$ 属于某集合 E 的隶属度; p_x 也是 $[0, 1]$ 的一个子集,表达相应的 h_x 的概率解释; $h_x(p_x)$ 统称为一个概率犹豫模糊元素,简写为 $h(p)$,它的数学表达式为

$$h(p) = \{ h_l(p_l) | l = 1, 2, \dots, |h(p)| \}. \quad (3)$$

这里: $|h(p)|$ 表示 $h(p)$ 中含有隶属度的数量, p_l 表示隶属度 h_l 对应的概率且满足 $\sum_{l=1}^{|h(p)|} p_l \leq 1$.

随后,在概率犹豫模糊集和概率型犹豫模糊元素的基础上,Xu等^[20]进一步阐述了概率犹豫模糊偏好关系.

给定集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,于是,定义在 X

上的概率犹豫模糊偏好关系^[3, 18, 20]可以用矩阵 $H = (h_{ij}(p_{ij}))_{n \times n} \in X \times X$ 来表达.其中, $h_{ij}(p_{ij})$ 是一个概率犹豫模糊元素,表示 x_i 对于 x_j 的偏好程度,且满足下面的条件:

$$h_{ij}^{\rho(l)} + h_{ji}^{\rho(l)} = 1, h_{ii} = 0.5, p_{ij}^{\rho(l)} = p_{ji}^{\rho(l)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

其中: $h_{ij}^{\rho(l)}$ 是 h_{ij} 中第 l 大的值, $p_{ij}^{\rho(l)}$ 是其对应的概率值.至此,概率犹豫模糊集的相关概念、性质、运算等基础研究工作基本完成.

可以看到,得益于对概率信息的有效利用,概率犹豫模糊集和概率犹豫模糊偏好关系既能够刻画决策者对客观事物不确定性的认知,又可以描述不同评价意见间重要程度的差异.同时,相比于同样引入了概率信息的概率优先序^[21]和概率语言术语集^[22]等信息表达形式,基于实数(而不是向量或语言)的概率型犹豫模糊集又有着便于计算和建模的优点.此外,虽然对于决策者或评估者而言,语言表征更为简单,也更加契合人们的评价习惯且具有较强的可操作性,但是基于目前的理论,还无法对语言术语进行直接处理.例如:“好”+“一般”的结果就无法用一个语言术语来表达.所以,在对语言术语进行后续处理之前,总是要把它们先转化为数的形式,这是语言决策中必不可少的一步.因此,从某种程度上看,对概率型犹豫模糊集的研究可算作是对概率语言术语集的后续处理的研究,可以与概率语言术语集理论无缝连接.

综上所述,无论是模糊决策还是语言决策,概率犹豫模糊集都是其中一项不可或缺的研究内容,深入系统地研究概率犹豫模糊决策理论及方法进行研究是一项重要而迫切的课题.

2 概率犹豫模糊信息的融合理论

在多属性决策问题中,通常需要专家先对备选方案在各个属性上的表现进行评估并给出相应的评价值;然后通过集成算子将每个方案得到的评估值分别融合进一个元素之中,进而通过集成后的元素的大小来确定全体方案的排序并选择最优方案.在群决策问题中,仍然需要用同样的方式来集成各个专家的意见.因此,无论是多属性决策问题还是群决策问题,信息融合都是解决问题的重要方法,具有举足轻重的地位.在模糊决策的发展过程中,对于每一种新出现的模糊信息的表达形式,都有学者研究并给出大量的集成算子.其中具有代表性的有:直觉模糊加权集成算子^[23-25]、直觉模糊Bonferroni均值算子^[26]、诱导的犹豫模糊集成算子^[27]以及犹豫模糊幂集成算

子^[28]等.

对于概率犹豫模糊集而言,因为同时拥有隶属度和概率两个维度,它的运算和集成的研究就要相对复杂一些.起初的研究多是对犹豫模糊集的运算和集成进行简单的推广,即隶属度的运算采用犹豫模糊集的运算方式,相应的概率的运算则是简单的相乘,而集成算子是在这种运算的基础上得出的.这种方法在概率犹豫模糊集的定义得到改进之后便不再适用了,因为随着参与运算的元素个数逐渐增加,运算结果的概率信息会不断衰减直至趋近于0,这是决策者所不能接受的.针对这一问题,Zhang等^[19]采取了归一化的方法.

给定两个概率犹豫模糊元素

$$h_1(p) = \{\gamma_{1_m}(p_{1_m}) | m = 1, 2, \dots, |h_1(p)|\},$$

$$h_2(p) = \{\gamma_{2_n}(p_{2_n}) | n = 1, 2, \dots, |h_2(p)|\},$$

于是^[13]

$$h_1(p) \oplus h_2(p) = \bigcup \left\{ [\gamma_{1_m} + \gamma_{2_n} - \gamma_{1_m} \gamma_{2_n}] \left(\frac{p_{1_m} p_{2_n}}{|h_1(p)| |h_2(p)|} \right) \right\},$$

$$\sum_{m=1} p_{1_m} \cdot \sum_{n=1} p_{2_n} \quad (5)$$

$$h_1(p) \otimes h_2(p) = \bigcup \left\{ [\gamma_{1_m} \gamma_{2_n}] \left(\frac{p_{1_m} p_{2_n}}{|h_1(p)| |h_2(p)|} \right) \right\},$$

$$\sum_{m=1} p_{1_m} \cdot \sum_{n=1} p_{2_n} \quad (6)$$

实际上,对于概率犹豫模糊信息运算的归一化有两种方式:1)对参与运算的每个元素的概率信息进行归一化,如果每个元素的概率信息都是完整的,则运算结果的概率信息就不会衰减;2)直接对运算结果的概率信息进行归一化.上述定义采用的是第2种方式,可以证明,两种方式得到的结果是完全一致的.随后,很多学者在上述成果的基础上对概率犹豫模糊信息的运算与集成进行了更加深入的研究,也获得了一些成果,例如:基于Einstein运算的概率犹豫模糊集成算子^[29]、概率中智犹豫模糊Choquet集成算子^[30]、概率犹豫模糊优先权集成算子^[31]以及其他一些算子和信息集成方式^[32-35].其中:基于Einstein运算的概率犹豫模糊元素的加法和乘法运算满足封闭性、单调性、交换律、结合律、分配律等优良性质,这使得概率犹豫模糊元素在运算时的限制更小;概率中智犹豫模糊Choquet集成算子不仅为内部属性之间的相关现象提供了支持,而且还充分考虑了外部空间的附带不确定性;而概率犹豫模糊优先权集成

算子则考虑了属性之间具有不同优先级的情况.这些集成算子都为概率犹豫模糊信息集成理论提供了很好的补充.

随着研究的逐渐深入,人们不断发现,在大多数情况下,特别是在群决策过程中,这种处理方式并不合理.事实上,改进后的概率犹豫模糊元素的定义设定单个元素中所有隶属度的概率之和可以小于1这个条件就是为了更加全面地表达决策群体所给出的初始决策信息,归一化的做法反而违背了这一初衷.因此,如何在不再将概率犹豫模糊元素归一化的前提下,解决运算结果的概率信息随着参与运算的元素个数的增加而逐渐衰减的问题,是一个亟待解决的问题.对于概率犹豫模糊信息的信息集成的研究存在的另外一大问题是计算繁琐.以概率犹豫模糊元素的加法运算为例,倘若两个含有3个隶属度的概率犹豫模糊元素相加,则所得的结果中便含有9个隶属度,再加上相应的概率的运算,意味着整个计算过程需要18次运算.如果参与运算的元素个数增加,则相应的运算次数更是以几何级数增加,因此,概率犹豫模糊元素的计算量是巨大的.相应地,以此为基础的概率犹豫模糊信息的信息集成也非常复杂且难以应用.目前,还没有一种有效的方法简化概率犹豫模糊元素的运算,这也导致概率犹豫模糊集在群决策问题中的应用受到了很大的限制.因此,只有将上述两个问题解决后,才能使基于概率犹豫模糊集的决策过程更加可靠,决策结果更加准确,决策方法更加便于应用.

3 概率犹豫模糊信息的偏好关系理论

偏好关系(又称判断矩阵)是决策者表达对一组目标(如方案和属性等)的偏好时经常使用的一种工具.与直接给出每个目标的得分不同,偏好关系以两两比较的形式最终求得全体目标的排序从而确定最优,这就为专家在无法提供每个方案的具体评价信息时提供了一个新的思路(很多时候,目标间的比较更为直观).目前,基于模糊集及其主要拓展形式的偏好关系的研究已经较为成熟,比较有代表性的偏好关系有:模糊偏好关系(又称互补偏好关系)^[36]、积性偏好关系(又称互反偏好关系)^[37]、直觉模糊偏好关系^[38]和犹豫模糊偏好关系^[39]等.其中,互补偏好关系和互反偏好关系代表了两大类偏好关系.以互补偏好关系为代表的一类用[0, 1]区间上的值来表达对两个方案之间的偏好程度;而互反偏好关系则是用1/9到9之间的17个值中的某一个来刻画偏好程度.两种偏好关系各有其优势和应用场景,在此不再赘述.

近几年,对于概率犹豫模糊偏好关系的研究刚刚起步.在这一概念被提出之后,一些学者从不同角度对其进行了深入探索. Zhou等^[40]发现,在很多情况下,人们很难通过主观评估获取概率犹豫模糊元素中每一项出现的概率,因此,他们提出了不确定概率犹豫模糊偏好关系,并对其预期一致性、可接受预期一致性、概率获得方法和一致性改进迭代算法进行了研究.随后,他们进一步提出了预期一致性指标和判断原理用来评估概率犹豫模糊偏好关系的一致性程度,并针对不一致的概率犹豫模糊偏好关系给出了一种迭代优化算法,通过优化其中的某些元素来提高其预期一致性^[41]. Wu等^[42]基于概率犹豫模糊集,设计了具有4个识别规则和2个方向规则的局部反馈策略来指导共识的达成. Li等^[43]基于概率犹豫模糊偏好关系的加性一致性和Hausdorff距离,提出了一个新的算法以建立决策群体内部的共识.随后,他们又提出了两个数学规划模型以导出决策过程中缺失的决策信息并提高概率犹豫模糊偏好关系的一致性级别,进而给出两个决策者之间接近度的定义并据此定义了决策者之间的共识指数,最终得到了一个可以同时满足个体一致性水平和群体共识阈值规划模型^[44]. Wu等^[45]在概率犹豫模糊集的背景下,从3个层面上计算了基于个体之间的距离而制定的共识测度:备择目标的配对层面、备择目标层面以及偏好关系层面,并基于此设计了一种采用局部反馈策略的算法以改善共识过程,避免了计算集体偏好关系的过程.在很多决策问题中,积性一致性更加符合实际情况且便于应用.因此, Li等^[46]在可乘传递性的基础上提出了概率犹豫积性偏好关系,同时,还提出了基于概率犹豫积性偏好关系的一致性指标和共识指数,进而建立了一种多准则决策方法.此外,还有一些学者也对概率犹豫模糊偏好关系进行了一些简单的研究^[47-49].

目前,概率犹豫模糊偏好关系的定义刚刚形成,对于其一致性和共识过程的研究也才刚刚开始,研究内容较为浅显.同时,由于概率犹豫模糊元素运算和集成的复杂性,概率犹豫模糊偏好关系的处理太过繁琐,导致这方面的研究目前处于停滞状态,相关成果数量较少.事实上,概率犹豫模糊偏好关系非常符合群决策的过程,它可以通过一个判断矩阵将多个决策群体成员的偏好信息容纳进来,并且最大化地保留初始决策信息,这大大简化了基于偏好信息的群决策过程.因此,概率犹豫模糊信息的偏好关系理论具有很大的研究价值和广阔的应用前景.

4 基于概率犹豫模糊集的决策方法

在概率犹豫模糊集之前,人们已经把很多经典的决策方法推广到犹豫模糊环境中,得到了一些犹豫模糊决策方法.例如:不完全权重信息下的犹豫模糊TOPSIS方法^[50]、犹豫模糊ELECTRE I、II方法^[51-52]、犹豫模糊PROMETHEE方法^[53]、犹豫模糊VIKOR方法^[54]、犹豫模糊TODIM方法^[55]、犹豫模糊LINMAP方法^[56]、犹豫模糊QUALIFLEX方法^[57]等.可以说,对于犹豫模糊决策方法的研究已经形成了一个较为完整的系统,基本可以覆盖犹豫模糊环境下的决策问题.相比较而言,关于概率犹豫模糊决策方法的研究刚刚起步,内容较少.

Tian等^[4]考虑到决策者的有限理性,引入了前景理论,建立了基于概率犹豫模糊偏好关系和前景理论的共识过程,为从建立决策指标体系的角度研究序贯投资问题提供了一种有效的方法. He等^[58]研究了概率犹豫模糊元素与参考理想值之间的关系,将参考理想方法与概率犹豫模糊集相结合,提出了3种不同的决策方法来解决参考理想多属性决策问题,为专家系统和智能系统的研究提供了新的决策视度. Zhou等^[5]将在险值这一金融概念引入决策过程中,定义了犹豫在险值和预期犹豫在险值,提出了一种动态规划模型来计算决策单元的权重并在此基础上又提出了基于预期犹豫在险值的尾部群体决策过程. Wu等^[59]基于GM(1, 1)模型和TOPSIS方法,提出了一种概率犹豫模糊环境下的动态突发事件应急处理方法. Gao等^[60]考虑了外部环境的不确定概率,针对危机管理中应急决策的特点,提出了一种基于概率犹豫模糊集的动态决策方法,以应对信息不足、不确定性和动态趋势,为应急响应的动态和演化特征提供了支持. Ding等^[61]基于概率犹豫模糊集的距离测度,建立了一个多目标优化模型以处理权重信息不完整的概率犹豫模糊多属性群决策问题,并开发了一种交互式方法为决策者提供新的偏好信息或修改先前的偏好信息提供了方便. Gupta等^[62]在时间序列预测中引入犹豫概率模糊集,提出了一种基于犹豫概率模糊集的时间序列预测方法.除了上述方法之外,还有一些学者对概率犹豫模糊环境下的决策方法进行研究并得到了部分成果,如概率犹豫模糊QUALIFLEX方法^[63]、概率犹豫模糊PROMETHEE II方法^[63]以及其他一些方法^[6-8, 64-72].

通过上面的综述可以看到,相比于更早出现的犹豫模糊集等信息表达方式,对于概率犹豫模糊群决策方法的研究只是刚刚起步,研究内容较少,范围较

窄. 事实上, 相比于其他模糊集的拓展形式, 概率犹豫模糊集在决策过程中有着独特的优势. 对于犹豫模糊集或者直觉模糊集等不含概率信息的集合而言, 它所包含的概率信息使它能够保留更多初始决策信息, 也更加符合决策者的主观意愿; 对于概率偏好集等语言术语集而言, 概率犹豫模糊集省去了将语言信息转化成实数信息的过程, 运算更加灵活, 便于建模且在计算过程中丢失的信息更少. 表1直观地表示了概率犹豫模糊决策方法相比于其他决策方法的优点.

表1 概率犹豫模糊决策方法的优点

优点	概率犹豫模糊决策方法	概率语言决策方法	不含概率信息的模糊决策方法
包含完整的初始决策信息, 更加符合决策者的主观意愿	√	√	×
运算更加灵活, 计算过程中丢失的信息更少	√	×	√

目前, 对于概率犹豫模糊决策的研究主要着重于理论与方法, 而在实际应用方面的研究成果不多. 然而, 基于概率犹豫模糊集的决策方法已经被尝试应用于社会生活的一些方面并取得了一定的成果, 未来也必将在方方面面的实际决策问题中发挥重要作用. 因此, 对概率犹豫环境下的决策方法的研究是必要且具有重要的实际应用价值.

5 未来研究展望

除了上述成果, 还有许多学者在概率犹豫模糊聚类方法^[73-75]、区间形式的概率型犹豫模糊集^[76-80]、概率对偶犹豫模糊集^[81-82]以及其他一些领域^[83-85]也做了一些工作, 这些工作为概率犹豫模糊决策理论提供了重要的补充, 但这些研究相对零散, 没有形成完整的系统. 总体而言, 对于概率犹豫模糊集的研究仍然处于起步阶段, 还有很大的发展潜力. 基于概率犹豫群决策的发展现状, 其未来的主要研究方向大致可分为以下4个方面.

1) 优化概率犹豫模糊信息的集成方式. 前文中曾提到, 概率犹豫模糊元素的归一化并不合理, 因此, 需要找到一种方式使得在概率犹豫模糊信息的集成过程中, 既能简化运算, 又能阻止概率信息的逐步衰减. 另一方面, 由于概率分布的性质, 概率犹豫模糊元素是可以被连续化的, 而连续化可以有效减少概率犹豫模糊元素中隶属度的个数, 从而简化其运算过程. 目前, 连续形式的概率犹豫模糊元素^[19]的概念已经被提出, 接下来, 针对概率犹豫模糊信息集成的一个重点研究方向就是连续形式的概率犹豫模糊元素

的运算法则和集成方式. 此外, 在犹豫模糊群决策问题中, 经常需要将多个专家给出的评估值整合到一起, 对大规模的犹豫模糊信息进行集成. 此时, 复杂的计算过程将成为一个严重的阻碍, 整个决策过程也会因此而受到较大的影响. 综上所述, 犹豫模糊元素运算的优化是今后犹豫模糊集研究的重点方向.

2) 概率犹豫模糊信息的测度理论. 目前, 对于概率犹豫模糊信息的测度理论的研究非常少. 事实上, 相比于犹豫模糊集等信息表达方式, 对于概率犹豫模糊信息的测度理论的研究要复杂得多, 主要原因如下: 概率犹豫模糊元素同时包含隶属度和概率两个部分的信息, 如何处理概率信息便是在建立概率犹豫模糊测度时必须解决的问题. 从形式上来看, 对于犹豫模糊集的测度, 完全可以当作向量的测度来处理, 事实上, 大部分学者也是这么做的. 但是, 当同时面对隶属度和概率信息时, 现有的研究通常选择将两种信息用某种方式合并后按照原方法处理. 这种方法固然有可取之处, 但从另一个角度来说, 隶属度和概率其实是两个维度的信息, 就如同一个点的 x 坐标和 y 坐标, 虽然都是数字, 但在计算时却不能随意混为一谈. 因此, 在今后的研究中, 需要找到新的方法使得在建立概率犹豫模糊信息的测度时, 概率信息可以得到更合理的处理.

3) 概率犹豫模糊偏好关系及其在群决策中的应用. 偏好关系理论、一致性和共识过程是群决策的重要组成部分, 基于偏好信息的决策方法(如层次分析法和网络分析法)在群决策中有着广泛的应用. 概率犹豫模糊元素同时包含了隶属度信息和概率信息, 在表征模糊和不确定信息方面具有优势, 可以很好地被应用于收集决策群体的偏好信息. 但是, 目前相关的研究还很少, 尤其是在概率犹豫积性偏好关系一致性的完整定义和共识过程及相关的群决策方法方面. 因此, 概率犹豫模糊偏好关系理论有着广阔的发展前景, 其在群决策中的应用也是今后的一个重要研究方向.

4) 多种类型信息的融合. 当处理概率犹豫模糊环境下的群决策问题时, 人们总是希望决策者能够以实数或概率犹豫模糊元素等形式给出他们的评估值. 但是, 由于客观事物的复杂性, 在某些情况下, 一些专家只能给出其他形式的信息. 如果这些专家被迫以某种他们并不熟悉的形式来给出其决策意见, 则很可能会影响决策结果的准确性. 例如, 医生在判断病人的病情时, 通常只能给出“严重”“较轻”等形容, 而很难将病情量化. 如果硬性要求医生用具体的

实数或概率犹豫模糊元素来表示病情,则不仅增加了医生的负担,而且有可能使决策结果产生偏差. 在大型的决策过程中,人们可能会收集到多种不同形式的信息,此时,需要采用一些方法来对这些不同形式的信息(如:实数信息、区间数信息、直觉模糊信息、语言信息等)进行融合. Zhu等^[86]提出了一种广义的网络分析法. 首先给出了复杂判断矩阵的概念,它被用于以多种不同的形式收集决策群体全部成员的偏好信息等,例如模糊偏好信息、区间模糊偏好信息、犹豫模糊偏好信息和随机(随机模糊)偏好信息等;然后,提出了通过复杂判断矩阵对全体备择方案进行排序的方法,这一成果为异质信息的信息融合的研究奠定了良好的基础. 随着决策过程日益复杂,决策群体的规模不断增大,在未来的研究中,多种类型数据的融合一定会成为学者们关注的又一个焦点.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-356.
- [2] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2010, 25(6): 529-539.
- [3] 朱斌. 基于偏好关系的决策方法研究及应用[D]. 南京: 东南大学经济管理学院, 2014.
(Zhu B. Decision method for research and application based on preference relation[D]. Nanjing: School of Economics and Management, Southeast University, 2014.)
- [4] Tian X L, Xu Z S, Fujita H. Sequential funding the venture project or not? A prospect consensus process with probabilistic hesitant fuzzy preference information[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 161: 172-184.
- [5] Zhou W, Xu Z S. Expected hesitant VaR for tail decision making under probabilistic hesitant fuzzy environment[J]. *Applied Soft Computing*, 2017, 60: 297-311.
- [6] 武文颖. 基于广义概率犹豫模糊信息的群决策方法研究及其在供应商选择中的应用[D]. 合肥: 合肥工业大学管理学院, 2019.
(Wu W Y. Research on group decision making method with generalized probabilistic hesitant fuzzy information and their applications in supplier selection[D]. Hefei: School of Management, Hefei University of Technology, 2019.)
- [7] Jiang F J, Ma Q G. Multi-attribute group decision making under probabilistic hesitant fuzzy environment with application to evaluate the transformation efficiency[J]. *Applied Intelligence*, 2018, 48(4): 953-965.
- [8] 周小颖, 马庆功. 概率犹豫模糊算法及其网络舆情预测模型选择[J]. *计算机工程与应用*, 2019, 55(4): 179-184.
(Zhou X L, Ma Q G. Probabilistic hesitant fuzzy algorithm and its application for selection method of network public opinion prediction model[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2019, 55(4): 179-184.)
- [9] Goguen J. *L-fuzzy sets*[J]. *Journal of Mathematic Analysis and Application*, 1967, 18(1): 145-174.
- [10] Dubois D, Prade H. *Fuzzy sets and systems: Theory and applications*[M]. New York: Kluwer Academic, 1980: 62-67.
- [11] Türksen I B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(2): 191-210.
- [12] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [13] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 31(3): 343-349.
- [14] Xu Z S. *Hesitant fuzzy sets theory*[M]. Berlin: Springer, 2014: 1-9.
- [15] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2011, 52(3): 395-407.
- [16] Zhang Z M. Weighted hesitant fuzzy sets and their application to multi-criteria decision making[J]. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 2014, 4(8): 1091-1123.
- [17] Farhadinia B. Utility of correlation measures for weighted hesitant fuzzy sets in medical diagnosis problems[J]. *Mathematical Modelling and Applications*, 2016, 1(2): 36-45.
- [18] Zhu B, Xu Z S. Probability-hesitant fuzzy sets and the representation of preference relations[J]. *Technological and Economic Development of Economy*, 2018, 24(3): 1029-1040.
- [19] Zhang S, Xu Z S, He Y. Operations and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making[J]. *Information Fusion*, 2017, 38: 1-11.
- [20] Xu Z S, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2017, 16(4): 481-503.
- [21] He Y, Xu Z S, Jiang W L. Probabilistic interval reference ordering sets in multi-criteria group decision making[J]. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 2017, 25(2): 189-212.
- [22] Pang Q, Xu Z S, Wang H. Probabilistic linguistic term sets in multi-attribute group decision making[J]. *Information Sciences*, 2016, 369: 128-143.
- [23] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(6): 1179-1187.
- [24] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. *International Journal of General Systems*, 2006, 35: 417-433.
- [25] Liao H C, Xu Z S. Intuitionistic fuzzy hybrid weighted

- aggregation operators[J]. *Journal of Intelligent Systems*, 2014, 29(11): 971-993.
- [26] Xu Z S, Yager R R. Intuitionistic fuzzy Bonferroni means[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 2011, 41(2): 568-578.
- [27] Xia M M, Xu Z S, Chen N. Induced aggregation under confidence levels[J]. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2011, 19(2): 201-227.
- [28] Zhang Z M. Hesitant fuzzy power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. *Information Sciences*, 2013, 234: 150-181.
- [29] Park J, Park Y, Son M. Hesitant probabilistic fuzzy information aggregation using Einstein operations[J]. *Information*, 2018, 9(9): 226.
- [30] Shao S T, Zhang X H, Zhao Q. Multi-attribute decision making based on probabilistic neutrosophic hesitant fuzzy Choquet aggregation operators[J]. *Symmetry*, 2019, 11(5): 623.
- [31] Li J, Wang Z X. Multi-attribute decision making based on prioritized operators under probabilistic hesitant fuzzy environments[J]. *Soft Computing*, 2019, 23(11): 3853-3868.
- [32] Farhadinia B, Herrera-Viedma E. A modification of probabilistic hesitant fuzzy sets and its application to multiple criteria decision making[J]. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2020, DOI: 10.22111/IJFS.2020.5233.
- [33] 吴健, 刘小弟, 张世涛, 等. 概率犹豫模糊 Bonferroni 平均算子及其决策应用[J]. *模糊系统与数学*, 2019, 33(5): 116-126.
(Wu J, Liu X D, Zhang S T, et al. Probabilistic hesitant fuzzy Bonferroni average operator and its application in decision-making[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2019, 33(5): 116-126.)
- [34] 李宝萍, 陈华友. 概率犹豫模糊 Maclaurin 对称平均算子及其多属性群决策模型[J]. *模糊系统与数学*, 2018, 32(5): 130-142.
(Li B P, Chen H Y. Probabilistic hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operator and its multi-attribute group decision-making model[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2018, 32(5): 130-142.)
- [35] 梁玉英. 基于概率犹豫模糊信息集成算法的数据产品选择[J]. *计算机工程与应用*, 2019, 55(3): 219-224.
(Liang Y Y. Data product selection based on probabilistic hesitant fuzzy information integration algorithm[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2019, 55(3): 219-224.)
- [36] Sa O. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, 1(3): 155-167.
- [37] Saaty T L. *The analytic hierarchy process*[M]. New York: McGraw-Hill, 1980: 15-36.
- [38] Xu Z S. Intuitionistic preference relations and their application in group decision making[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(11): 2363-2379.
- [39] Liao H C, Xu Z S, Xia M M. Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making[J]. *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 2014, 13(1): 47-76.
- [40] Zhou W, Xu Z S. Group consistency and group decision making under uncertain probabilistic hesitant fuzzy preference environment[J]. *Information Sciences*, 2017, 414: 276-288.
- [41] Zhou W, Xu Z S. Probability calculation and element optimization of probabilistic hesitant fuzzy preference relations based on expected consistency[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(3): 1367-1378.
- [42] Wu Z B, Xu J P. A consensus model for large-scale group decision making with hesitant fuzzy information and changeable clusters[J]. *Information Fusion*, 2018, 41: 217-231.
- [43] Li J, Wang Z X. Consensus building for probabilistic hesitant fuzzy preference relations with expected additive consistency[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2018, 20(5): 1495-1510.
- [44] Li J, Wang Z X. A programming model for consistency and consensus in group decision making with probabilistic hesitant fuzzy preference relations[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2018, 20(8): 2399-2414.
- [45] Wu Z B, Jin B M, Xu J P. Local feedback strategy for consensus building with probability-hesitant fuzzy preference relations[J]. *Applied Soft Computing*, 2017, 67: 691-705.
- [46] Li J, Wang J Q. Multi-criteria decision-making with probabilistic hesitant fuzzy information based on expected multiplicative consistency[J]. *Neural Computing and Applications*, 2019, 31(12): 8897-8915.
- [47] Bashir Z, Rashid T, Iqbal M. Hesitant probabilistic fuzzy preference relations in decision making[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, DOI: Org /10.1155/2018/5383487.
- [48] Bashir Z, Rashid T, Watróbski J, et al. Hesitant probabilistic multiplicative preference relations in group decision making[J]. *Applied Sciences*, 2018, 8(3): 398.
- [49] 朱轮, 杨波. 基于概率不确定犹豫模糊偏好关系的决策模型[J]. *计算机工程与应用*, 2018, 54(20): 110-114.
(Zhu L, Yang B. Decision-making model based on probabilistic uncertain hesitant fuzzy preference relations[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54(20): 110-114.)
- [50] Xu Z S, Zhang X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision-making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2013, 52: 53-64.
- [51] Chen N, Xu Z S, Xia M M. The ELECTRE I multi-criteria decision making method based on hesitant fuzzy sets[J]. *International Journal of Information Technology &*

- Decision Making, 2015, 14(3): 621-657.
- [52] Chen N, Xu Z S. Hesitant fuzzy ELECTRE II approach: A new way to handle multi-criteria decision making problems[J]. Information Sciences, 2015, 292: 175-197.
- [53] Mahmoudi A, Sadi-Nezhad S, Makui A, et al. An extension on PROMETHEE based on the typical hesitant fuzzy sets to solve multi-attribute decision-making problem[J]. Kybernetes, 2016, 45(8): 1213-1231.
- [54] Liao H C, Xu Z S. A VIKOR-based method for hesitant fuzzy multi-criteria decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2013, 12(4): 373-392.
- [55] Zhang X L, Xu Z S. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 61(1): 48-58.
- [56] Zhang X L, Xu Z S. Interval programming method for hesitant fuzzy multi-attribute group decision making with incomplete preference over alternatives[J]. Computers & Industrial Engineering, 2014, 75: 217-229.
- [57] Zhang X L, Xu Z S. Hesitant fuzzy QUALIFLEX approach with a signed distance-based comparison method for multiple criteria decision analysis[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(2): 873-884.
- [58] He Y, Xu Z S. Multi-attribute decision making methods based on reference ideal theory with probabilistic hesitant information[J]. Expert Systems with Applications, 2019, 118: 459-469.
- [59] Wu J, Liu X D, Wang Z W, et al. Dynamic emergency decision-making method with probabilistic hesitant fuzzy information based on GM(1,1) and TOPSIS[J]. IEEE Access, 2019, 7: 7054-7066.
- [60] Gao J, Xu Z S, Liao H C. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1261-1278.
- [61] Ding J, Xu Z S, Zhao N. An interactive approach to probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision-making with incomplete weight information[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 32(3): 2523-2536.
- [62] Gupta K K, Kumar S. Hesitant probabilistic fuzzy set based time series forecasting method[J]. Granular Computing, 2019, 4(4): 739-758.
- [63] Li J, Wang J Q. Multi-criteria outranking methods with hesitant probabilistic fuzzy sets[J]. Cognitive Computing, 2017, 9(5): 611-625.
- [64] Zhang W K, Du J, Tian X L. Finding a promising venture capital project with todim under probabilistic hesitant fuzzy circumstance[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2018, 24(5): 2026-2044.
- [65] Wang Z X, Li J. Correlation coefficients of probabilistic hesitant fuzzy elements and their applications to evaluation of the alternatives[J]. Symmetry, 2017, 9(11): 259.
- [66] Song C Y, Xu Z S, Zhao H. A novel comparison of probabilistic hesitant fuzzy elements in multi-criteria decision making[J]. Symmetry, 2018, 10(5): 177.
- [67] Jiang H M, Kwong C K, Park W Y. Probabilistic fuzzy regression approach for preference modeling[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2017, 64: 286-294.
- [68] 朱峰. 概率犹豫模糊多属性决策方法及其应用[D]. 郑州: 郑州大学商学院, 2019.
(Zhu F. Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute decision-making method and its application[D]. Zhengzhou: Business School, Zhengzhou University: 2019.)
- [69] 吴健, 刘小弟, 孙超勇, 等. 基于GM(1,1)与灰色关联度的概率犹豫模糊信息应急决策方法[J]. 统计与决策, 2020, 36(2): 164-168.
(Wu J, Liu X D, Sun C Y, et al. Emergency decision-making method of probabilistic hesitant fuzzy information based on GM(1,1) and grey correlation degree[J]. Statistics and Decision, 2020, 36(2): 164-168.)
- [70] 朱峰, 徐济超, 刘玉敏, 等. 基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(8): 1977-1986.
(Zhu F, Xu J C, Liu Y M, et al. Probabilistic hesitant fuzzy multiple attribute decision-making method based on symbol distance and cross entropy[J]. Control and Decision, 2020, 35(8): 1977-1986.)
- [71] 刘玉敏, 朱峰, 靳琳琳. 基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(4): 861-870.
(Liu Y M, Zhu F, Jin L L. Multi-attribute decision-making method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 861-870.)
- [72] 朱峰, 刘玉敏, 靳琳琳. 基于关联系数的概率犹豫模糊多属性决策方法[J]. 统计与决策, 2019(18): 41-45.
(Zhu F, Liu Y M, Jin L L. Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute decision-making method based on correlation coefficient[J]. Statistics and Decision, 2019(18): 41-45.)
- [73] Wang Z X, Li J. Correlation coefficients of probabilistic hesitant fuzzy elements and their applications to evaluation of the alternatives[J]. Symmetry, 2017, 9(11): 259.
- [74] Song C Y, Xu Z S, Zhao H. New correlation coefficients between probabilistic hesitant fuzzy sets and their applications in cluster analysis[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2019, 21(2): 355-368.
- [75] Farhadinia B. Utility of correlation measures for weighted hesitant fuzzy sets in medical diagnosis problems[J]. Mathematical Modelling and Applications, 2016, 1(2): 36-45.
- [76] Wu W Y, Li Y, Ni Z W, et al. Probabilistic interval-valued hesitant fuzzy information aggregation operators and their application to multi-attribute decision making[J].

Algorithms, 2018, 11: 0120.

- [77] Krishankumar R, Ravichandran K S, Kar S, et al. Interval-valued probabilistic hesitant fuzzy set for multi-criteria group decision-making[J]. *Soft Computing*, 2019, 23(21): 10853-10879.
- [78] Zhang G, Wang J Q, Wang T L. Multi-criteria group decision-making method based on TODIM with probabilistic interval-valued hesitant fuzzy information[J]. *Expert Systems*, 2019, 36(4): e12424.
- [79] Sarwar Sindhu M S, Rashid T, Kashif A, et al. Multiple criteria decision making based on probabilistic interval-valued hesitant fuzzy sets by using LP methodology[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2019, 2019: 1-12.
- [80] Krishankumar R, Ravichandran K S, Ahmed M I, et al. Interval-valued probabilistic hesitant fuzzy set based muirhead mean for multi-attribute group decision-making[J]. *Mathematics*, 2019, 7(4): 342.
- [81] Hao Z N, Xu Z S, Zhao H, et al. Probabilistic dual hesitant fuzzy set and its application in risk evaluation[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 127: 16-28.
- [82] Garg H, Kaur G. Algorithm for probabilistic dual hesitant fuzzy multi-criteria decision-making based on aggregation operators with new distance measures[J]. *Mathematics* 2018, 6(12): 280.
- [83] Zhai Y L, Xu Z S, Liao H C. Measures of probabilistic interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy sets and the application in reducing excessive medical examinations[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(3): 1651-1670.
- [84] Song C Y, Xu Z S, Zhao H, et al. Interval-valued probabilistic hesitant fuzzy set and its application in the arctic geopolitical risk evaluation[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2019, 34(4): 627-651.
- [85] 罗世华, 方童, 刘俊. 概率区间值直觉犹豫模糊 Maclaurin 对称平均算子及决策方法[J]. *控制与决策*, 2020, 10.13195/j.kzyjc.2019.1370.
(Luo S H, Fang T, Liu J. Probabilistic interval-value intuition hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operator and decision-making method[J]. *Control and Decision*, 2020, 10.13195/j.kzyjc.2019.1370.)
- [86] Zhu B, Xu Z S, Zhang R, et al. Generalized analytic network process[J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 244(1): 277-288.

作者简介

徐泽水(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与技术、信息融合理论和聚类算法、模糊系统与优化算法等研究, E-mail: xuzeshui@263.net;

张申(1992—), 男, 博士生, 从事决策理论与方法的研究, E-mail: zhsh_227@163.com.

科研团队简介

徐泽水教授科研团队立足于四川大学商学院, 长期专注于决策科学领域, 一直倡导将前沿性应用基础研究成果与国民经济发展和国家重大需求紧密相连。目前, 以徐泽水教授为核心的团队秉承“勤奋、严谨、求实、创新”的团队科研文化建设理念, 以建成国际一流的研究团队、培养具有深厚人文底蕴、扎实科研素质、宽广国际视野的优秀跨学科复合型人才为目标, 不断进步, 自我突破。科研团队自成立以来, 在信息融合理论与方法、复杂决策理论、数据处理技术等方面取得了一系列开创性的研究成果, 并成功应用于军事领域复杂问题的建模与决策、我国战略能源通道风险评估与突发事件应急响应、大数据驱动的医疗管理等实际问题, 团队在培育优秀人才、建设科研文化、拓展国际视野、开拓创新精神等方面也取得了丰厚的成果和实践经验。

课题组负责人徐泽水教授是国际系统与控制科学院院士, 国际电气和电子工程师协会、国际模糊系统协会、英国皇家艺术协会、英国工程技术学会、英国计算机协会等会士, 长江学者特聘教授, 国家杰出青年科学基金和中国青年科技奖获得者, 2019年入选全球科学家500强, 全球高被引科学家(2014-2019), 中国高被引学者(2014-2019蝉联计算机科学领域榜首), 国家百千万人才工程人选, 国家有突出贡献中青年专家, 享受国务院政府特殊津贴专家等, 担任《IEEE Transactions on Cybernetics》、《IEEE Transactions on Fuzzy Systems》、《Information Sciences》、《Knowledge-Based Systems》、《Information Fusion》、《Applied Soft Computing》、《Applied Intelligence》等60余份国内外期刊副主编、顾问编委、编委或客座编辑, H指数125。研究团队承担了国家杰出青年科学基金项目、国家自然科学基金重点项目、国家社会科学基金重大项目、国家自然科学基金面上项目、四川省软科学计划项目等40余项。曾获教育部自然科学一等奖2项, 教育部自然科学二等奖2项。发表SSCI/SCI论文600余篇, 由Springer出版英文专著15部, 论著被引60000余次。

(责任编辑: 李君玲)