

# 双层多态加权 $k/n$ 系统可用性模型与冗余设计优化

李 婧<sup>1</sup>, 陈光宇<sup>1†</sup>, 唐 菱<sup>2</sup>, 王瑞琦<sup>1</sup>

(1. 电子科技大学 经济与管理学院, 成都 611731;  
2. 中国工程物理研究院 激光聚变研究中心, 四川 绵阳 621900)

**摘要:** 鉴于当前多态系统可用性模型刻画分层性能要求的不足, 定义一种更加通用的双层多态加权  $k/n$  系统, 提出新的分层运算符结合通用生成函数的方法解决权重的跨层次依赖问题, 建立系统可用度模型; 针对多态系统冗余设计面临的“子系统和部件综合选择问题”, 构建可用度约束下的系统总成本优化模型, 利用遗传算法编程获取各子系统和部件的经济数量; 以某供电系统为例验证所提出模型及方法的正确性和有效性, 并对比说明双层性能要求对系统可用性和经济性的影响. 研究成果可为复杂系统在不同性能要求下的设计优化提供决策支持.

**关键词:** 多态系统; 可用性; 双层性能要求; 通用生成函数; 设计优化

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1752

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 李婧, 陈光宇, 唐菱, 等. 双层多态加权  $k/n$  系统可用性模型与冗余设计优化[J]. 控制与决策, 2020, 35(11): 2752-2760.

## Availability modeling and redundancy design optimization of dual hierarchical multi-state weighted $k$ -out-of- $n$ system

LI Jing<sup>1</sup>, CHEN Guang-yu<sup>1†</sup>, TANG Ling<sup>2</sup>, WANG Rui-qi<sup>1</sup>

(1. School of Management and Economics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China; 2. Research Center of Laser Fusion, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

**Abstract:** Aiming at the limitations of present multi-state systems in characterizing hierarchical performance requirements, a more general dual hierarchical multi-state weighted  $k$ -out-of- $n$  system is defined. A new method combining hierarchical operators with universal generation functions is developed to solve the problem of weight dependencies across the different levels to access the availability of the proposed system. Then, the system total cost optimization model under the availability constraint is constructed to study the problem of integrated selection of subsystems and components in system design. The genetic algorithm is adopted to obtain the economic quantities of various subsystems and components. Finally, a power system is demonstrated for the correctness of the presented approach and the effects of the dual hierarchical performance requirements on system availability and cost. The results can offer implications for the design optimization of complex systems under different performance requirements.

**Keywords:** multi-state system; availability; dual hierarchical performance requirements; universal generating functions; design optimization

## 0 引言

随着复杂系统可靠性研究的深入, 人们发现系统及组成单元在失效演化过程中会呈现不同性能水平或多个失效模式, 如供电系统、计算机系统及运输系统等<sup>[1-2]</sup>. 常规二态可靠性理论不能准确描述此类系统的复杂失效过程, 迫切需要开展多态可靠性理论研究. 多态可靠性理论能揭示复杂系统多状态的本质特征, 客观反映系统状态的演变规律, 避免系统性能

分析与可靠性分析相脱节, 具有重大的科学意义和工程价值<sup>[3]</sup>. 其中, 可用度作为综合反映系统可靠性、维修性和保障性的重要参数, 表征满足特定性能要求的能力<sup>[4]</sup>.

多态系统的非布尔逻辑属性增加了可用性建模的难度. 通用生成函数(universal generating function, UGF)方法作为一种简洁、高效的离散随机变量组合运算方法, 已广泛应用于多态系统的可靠性

收稿日期: 2018-12-21; 修回日期: 2019-04-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71531003).

责任编委: 唐万生.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: chenguangyu@uestc.edu.cn.

或可用性研究中<sup>[5]</sup>. 相比扩展布尔模型、递归算法及随机仿真等方法, UGF方法运算速度快, 便于数值实现, 可评价具有不同拓扑结构、不同要素间相互作用、不同物理性能指标的系统可靠度或可用度<sup>[6]</sup>. 例如: 文献[7]利用UGF方法结合模糊集技术近似计算了多态加权 $k/n$ 系统可靠度; 文献[8-9]通过UGF方法评价了具有性能共享机制的多态串并联系统可用度; 文献[10]将通用生成函数方法与全概率理论相结合, 建立了多阶段任务多态串并联系统的可用度模型.

现有多态系统可用性模型多考虑单一性能要求, 其状态概率为系统权重阈值的函数. 其中“权重”表示部件或系统的性能水平. 文献[11]提出了多态加权 $k/n$ 系统模型, 规定系统状态概率为部件权重之和且不小于系统该状态权重阈值的概率; 在多态串并联系统的研究中, 文献[12-13]定义当且仅当最小子系统权重不小于系统权重阈值时, 系统可用; 针对多态桥联系统, 文献[14]将系统可用度定义为系统总权重不小于系统权重阈值的概率. 以上研究为多态系统可用性分析与性能分析相结合提供了基础和思路, 给出了单一性能要求情形下系统的可用度定义, 但无法应用于具有双层性能要求的复杂多态系统. 例如, 某飞机发电系统由多个并联发电子系统构成, 子系统由若干个发电机组组成. 由于机械零件和电气组件的老化和衰退使发电机组在寿命期内具有多个不同的工作效率, 发电系统有不同的输出功率(性能水平). 为保证系统持续稳定供电, 要求系统总输出功率不低于整体负荷, 同时各发电子系统输出功率应满足相应的低压和高压配电系统负荷<sup>[15]</sup>. 文献[16]在城市基础设施系统的可靠性研究中提到政府通过制定系统各层单元的性能要求判断系统的老化程度以便维护, 但在其系统状态定义和可靠性建模中只考虑了系统层的性能要求; 引入子系统层性能要求, 文献[17]推导了双层加权 $k/n$ 系统可靠度边界的解析式, 但没有考虑部件的多态特性. 针对上述问题, 本文在多态加权 $k/n$ 系统的基础上, 将单层 $k/n$ 结构扩展为双层, 综合考虑系统层和子系统层性能要求, 构建双层多态加权 $k/n$ 系统可用度模型, 以此研究其设计优化问题. 本文系统状态定义不仅涵盖了传统单一性能要求的情形, 还考虑了多性能要求以及不同性能要求的层次性特征, 具有普遍的适用性.

目前, 多态系统的设计优化较少涉及双层性能要求, 且多关注系统底层的“部件选择问题”. 以系统可靠度或可用度为目标函数, 文献[18]通过构建已知部件状态概率上下界的多态串并联系统冗余优化模型,

在成本约束下得到满足可用度边界的各子系统所需部件的最优数量; 文献[19]研究了部件失效率服从威布尔分布的多态串并联系统的冗余分配问题, 在系统总成本约束下最大化系统可靠度, 决策变量为不同类型部件的数量; 文献[20]在子系统部件不同质的情形下建立了系统混合冗余优化模型, 得到满足系统成本及性能约束的最优活动及备用部件的类型和数量; 以系统成本为目标函数, 文献[10]研究了随机重构的可修多态串并联系统的冗余优化问题, 在可用度约束下优化部件数量以最小化系统运行成本; 文献[14]在多态桥联系统可用度和性能水平的约束下构建了系统总成本优化模型, 得到各子系统部件的最优类型及数量; 文献[21]将多态加权 $k/n$ 系统期望可用度及其成本的差值作为净现值函数, 以最大化净现值函数为目标求解部件配置类型及数量; 文献[22]考虑了管理技术和组织行为对多态串并联系统可靠度的影响, 得到满足可靠度约束的最优部件数量及子系统层和部件层管理技术和组织行为. 上述研究解决了不同约束和目标函数下的“部件选择问题”, 但都无法同时优化子系统及部件的类型及数量, 为系统工程师提供完整的设计优化方案. 特别是在多态串并联系统的优化研究中, 多假设子系统类型及数量已知.

综上, 本文考虑系统层及子系统层权重阈值定义一种新的多态系统, 基于UGF建立其可用度模型; 并针对“部件和子系统的综合选择问题”, 构建可用度约束下的系统总成本优化模型, 以获取各单元类型及数量的合理配置. 最后, 通过具体算例验证模型及算法的有效性, 并分析双层权重阈值对系统可用性 & 设计优化结果的影响.

## 1 系统描述

### 1.1 多态部件

多态部件从性能水平和失效模式角度可分为两类, 主要区别为是否具有内在顺序<sup>[23]</sup>. 本文考虑部件多性能水平的情形, 设部件 $j(j \geq 1)$ 有 $M+1$ 个不同的状态, 处于状态 $m(m = 0, 1, \dots, M)$ 的性能水平和概率为 $g_{m_j}, p_{m_j}$ . 当部件处于较好状态时, 性能水平较高; 完全失效时性能水平为零, 即 $g_{0_j} = 0$ .

马尔科夫模型被广泛应用于多态部件或系统状态转移随机过程的建模<sup>[1]</sup>. 假设部件间统计独立, 其失效和维修时间均服从指数分布, 且不同状态间转移只发生在相邻状态. 部件的马尔科夫状态转移图如图1所示.

在图1中:  $\lambda_{\alpha, \beta}(\alpha, \beta = 0, 1, \dots, M, \alpha > \beta)$ 为部件的失效率;  $\mu_{\alpha, \beta}(\alpha, \beta = 0, 1, \dots, M, \alpha < \beta)$ 为修复

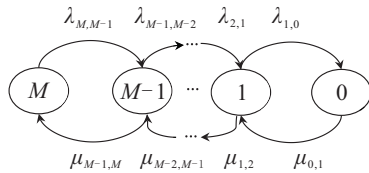


图1 多态部件的马尔科夫状态转移图

率. 部件  $j$  的状态转移速率矩阵  $E_j$  为

$$E_j = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,M} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,0} & a_{M,1} & \dots & a_{M,M} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$a_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \lambda_{\alpha,\beta}, & \alpha > \beta; \\ \mu_{\alpha,\beta}, & \alpha < \beta; \\ -\sum_{\alpha \neq \beta} a_{\alpha,\beta}, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

1.2 系统状态定义

在部件多性能水平情形下,文献[11]提出了多态加权  $k/n$  系统,规定当系统权重不小于顶层权重阈值  $k_m$  时,系统处于状态  $m$  及以上. 基于此,本文综合考虑系统顶层和子系统层权重阈值,定义一种新的双层  $k/n$  结构的多态系统.

该系统及其子系统都为表决结构. 系统层和子系统层分别由  $N$  和  $n(n, N \geq 1)$  个不同子系统和部件组成. 其中子系统和部件分别有  $I$  和  $J(I, J \geq 1)$  种类型. 子系统  $i(i = 1, 2, \dots, I)$  的数量为  $N_i(0 \leq N_i \leq N)$ , 由  $n_i(0 \leq n_i \leq n)$  个多态部件组成, 其中部件  $j(j = 1, 2, \dots, J)$  的数量为  $n_{ij}(0 \leq n_{ij} \leq n_i)$ . 系统的可靠性框图如图2所示.

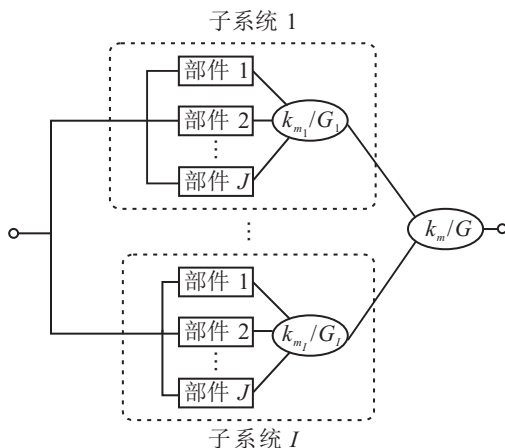


图2 双层多态加权  $k/n$  系统可靠性框图

由于并联子系统与部件共同承担任务,系统权重为各子系统权重之和,子系统权重为所含部件权重之和. 规定当且仅当系统及各子系统权重都不小于相应的权重阈值时,系统处于状态  $m$  及以上,视为系

统可用. 令随机变量  $G$  和  $G_i$  表示系统及子系统  $i$  的权重,则系统可用度为

$$A(k_m, k_{m_i}) = \text{pr}\{\phi \geq m\} = \text{pr}\{G \geq k_m \cap G_1 \geq k_{m_1} \cap \dots \cap G_I \geq k_{m_I}\} = \text{pr}\{B \cap B_1 \cap \dots \cap B_I\}. \quad (2)$$

其中:系统及子系统  $i$  处于状态  $m$  的权重阈值  $k_m$  和  $k_{m_i}$  都为不小于0的正实数;系统最差状态为0,则  $\text{pr}\{\phi \geq 0\} = 1$ ;事件  $B, B_i$  分别表示系统、子系统  $i$  的权重不低于阈值.

事实上,单一权重阈值的多态系统是上述系统的特例. 当  $k_{m_1} = k_{m_2} = \dots = k_{m_I} = 0$  且  $k_m \neq 0$  时,为多态加权  $k/n$  系统;当  $k_{m_1} = k_{m_2} = \dots = k_{m_I}$  且  $k_m = 0$  时,为多态串并系统.

与传统多态系统类似,上述系统权重及其子系统权重具有依赖性,满足以下关系式:

$$G = \sum_{i=1}^I N_i \cdot G_i. \quad (3)$$

当仅考虑系统权重阈值时,可基于式(3)得到系统通用生成函数,并通过定义运算符求解令事件  $B$  成立的系统概率分布,如文献[11]. 但当系统层和子系统层都有权重阈值时,由于权重具有跨层次依赖性,且系统顶层权重阈值无法具体表征各子系统权重阈值,事件  $B$  与  $B_i$  互不独立且不能彼此映射. 此时,单纯基于系统层通用生成函数难以筛选令事件  $B$  和  $B_i$  同时成立的状态概率分布. 显然,权重的跨层次依赖性及权重阈值的分层性增加了系统可用度建模的复杂性和困难度.

2 系统可用度模型

为解决权重的跨层次依赖问题,明确依赖性与层次性的对应关系,借鉴文献[24]的层次化分解思想,通过分层运算符结合UGF的方法评价系统可用度.

文献[6]详细论述了UGF方法及其应用,其基本原理是将离散随机变量表示为多项式形式,根据离散随机变量的运算法则定义多项式的组合算子,并通过组合运算得到最终离散随机变量的多项式. 以下基于UGF原理,根据部件多态属性及系统结构,通过组合算子自下而上逐层递归生成子系统及系统UGF;然后定义系统层及子系统运算符,分层筛选UGF中不小于权重阈值的状态概率分布,求解系统可用度. 解决权重跨层次依赖问题的关键是,通过分层运算符逐层分解权重阈值,实现在事件  $B_i$  成立的前提下筛选令事件  $B$  成立的系统权重及概率分布. 具体步骤如下.

step 1: 计算部件状态概率生成部件 UGF.

令  $\mathbf{p}_j(t) = (p_{0_j}(t), p_{1_j}(t), \dots, p_{M_j}(t))$  表示  $t$  时刻部件  $j$  在状态  $0, 1, \dots, M$  的概率向量. 根据式 (1) 的状态转移速率矩阵  $\mathbf{E}_j$  建立部件的 Kolmogorov 微分方程式

$$\frac{d\mathbf{p}_j(t)}{dt} = \mathbf{p}_j(t) \cdot \mathbf{E}_j. \quad (4)$$

在任意时刻  $t$ , 部件所有状态概率之和为 1, 即

$$\mathbf{p}_j(t)^T \cdot \mathbf{1} = 1. \quad (5)$$

结合初始条件  $p_{0_j}(0) = 0, p_{1_j}(0) = 0, \dots, p_{(M-1)_j}(0) = 0, p_{M_j}(0) = 1$ , 求解式 (4) 和 (5), 并令  $t \rightarrow \infty$ , 可得部件处于状态  $m$  的概率为  $p_{m_j}$ . 已知部件  $j$  处于状态  $m$  的权重为  $g_{m_j}$ , 生成部件  $j$  的 UGF 为

$$U_j(z) = \sum_{m=0}^M p_{m_j} z^{g_{m_j}}. \quad (6)$$

step 2: 定义子系统层运算符生成子系统 UGF.

初始 UGF 由部件 UGF 经组合算子进行组合运算得到. 利用并联组合算子  $\Omega_{\text{par}}^{[6]}$  可生成子系统  $i$  的初始 UGF, 用  $U_i^0(z)$  表示为

$$U_i^0(z) = \Omega_{\text{par}}(U_1(z), U_2(z), \dots, U_J(z)) = \Omega_{\text{par}}\left(\sum_{m=0}^M p_{m_1} z^{g_{m_1}}, \sum_{m=0}^M p_{m_2} z^{g_{m_2}}, \dots, \sum_{m=0}^M p_{m_J} z^{g_{m_J}}\right) = \sum_{m=0}^M \dots \sum_{m=0}^M \left(\prod_{j=1}^J (p_{m_j})^{n_{ij}} z^{\varphi_i(\mathbf{g}_{m_j})}\right). \quad (7)$$

$U_i^0(z)$  以多项式的形式给出了子系统  $i$  所有可能的权重值及其概率分布. 基于此, 考虑系统运行对子系统层的性能要求, 定义子系统  $i$  的运算符  $\delta_i$ , 在初始 UGF 中筛选令事件  $B_i$  成立的状态权重及概率, 生成子系统 UGF, 记为

$$U_i(z) = \delta_i(U_i^0(z), k_{m_i}) = \delta_i\left(\sum_{m=0}^M \dots \sum_{m=0}^M \left(\prod_{j=1}^J (p_{m_j})^{n_{ij}} z^{\varphi_i(\mathbf{g}_{m_j})}\right), k_{m_i}\right) = \sum_{m=0}^M \dots \sum_{m=0}^M \left(\prod_{j=1}^J (p_{m_j})^{n_{ij}} z^{\varphi_i(\mathbf{g}_{m_j})}\right) \cdot 1(\varphi_i(\mathbf{g}_{m_j}) \geq k_{m_i}) = \left(\sum_{m=0}^M p_{m_i} z^{g_{m_i}}\right) \cdot 1(g_{m_i} \geq k_{m_i}). \quad (8)$$

其中:  $\mathbf{g}_{m_j} = (g_{m_1}, g_{m_2}, \dots, g_{m_j})$  为子系统  $i$  中部件的权重向量;  $p_{m_i}$  和  $g_{m_i}$  为子系统  $i$  处于状态  $m$  的概率和权重;  $1(\cdot)$  为效用函数,  $1(\text{TRUE}) = 1; 1(\text{FALSE}) = 0$ ;  $\varphi_i(\cdot)$  为子系统  $i$  的结构函数, 在并联结构中 表示所含部件权重之和, 即

$$\varphi_i(\mathbf{g}_{m_j}) = \sum_{j=1}^J n_{ij} \cdot g_{m_j}. \quad (9)$$

step 3: 组合运算符系统 UGF 生成系统 UGF.

利用组合算子  $\Omega_{\text{par}}$ , 由子系统 UGF 得到系统 UGF, 有

$$U(z) = \Omega_{\text{par}}(U_1(z), U_2(z), \dots, U_I(z)) = \Omega_{\text{par}}\left(\left(\sum_{m=0}^M p_{m_1} z^{g_{m_1}}\right) \cdot 1(g_{m_1} \geq k_{m_1}), \dots, \left(\sum_{m=0}^M p_{m_I} z^{g_{m_I}}\right) \cdot 1(g_{m_I} \geq k_{m_I})\right) = \sum_{m=0}^M \dots \sum_{m=0}^M \left(\prod_{i=1}^I (p_{m_i})^{N_i} \cdot 1(g_{m_i} \geq k_{m_i})\right) \cdot z^{\varphi(\mathbf{g}_{m_i})}. \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{g}_{m_i} = (g_{m_1}, g_{m_2}, \dots, g_{m_I})$  为子系统的权重向量;  $p_m$  和  $g_m$  为系统处于状态  $m$  的概率和权重; 系统的结构函数为

$$\varphi(\mathbf{g}_{m_i}) = \sum_{i=1}^I N_i \cdot g_{m_i}. \quad (11)$$

step 4: 定义系统层运算符构建可用度模型.

考虑系统层性能要求, 通过定义系统层运算符  $\delta$  筛选令事件  $B$  成立的系统状态概率, 得到系统处于状态  $m$  或以上的概率, 即可用度为

$$A(k_m, k_{m_i}) = \delta(U(z), k_m) = \delta\left(\sum_{m=0}^M \dots \sum_{m=0}^M \left(\prod_{i=1}^I (p_{m_i})^{N_i} \cdot 1(g_{m_i} \geq k_{m_i})\right) \cdot z^{\varphi(\mathbf{g}_{m_i})}, k_m\right) = \sum_{m=0}^M p_m \cdot 1(\varphi(\mathbf{g}_{m_i}) \geq k_m). \quad (12)$$

以上建模方法也适用于单一权重阈值的多态系统. 以文献 [22] 的多态串并联系统为例, 其可用度为最小子系统权重不小于权重阈值  $w$  的概率, 即所有子系统权重都不小于  $w$  的概率. 根据上述算法步骤可得其系统 UGF 及可用度为

$$U(z) = \Omega_{\text{par}}(U_1(z), U_2(z), \dots, U_I(z)) = \sum_{m=0}^M \dots \sum_{m=0}^M \left(\prod_{i=1}^I (p_{m_i})^{N_i} \cdot 1(g_{m_i} \geq w)\right) \cdot z^{\varphi(\mathbf{g}_{m_i})}, \quad (13)$$

$$A(0, w) = \delta(U(z), 0) = \delta\left(\sum_{m=0}^M \dots \sum_{m=0}^M \left(\prod_{i=1}^I (p_{m_i})^{N_i} \cdot 1(g_{m_i} \geq w)\right) \cdot z^{\varphi(\mathbf{g}_{m_i})}, 0\right) = \sum_{m=0}^M p_m. \quad (14)$$

上述分层运算符结合UGF的可用度建模方法,综合考虑了系统层和子系统层的权重阈值,克服了权重的跨层次依赖问题.较单一权重阈值下的建模方法适用范围更广,能更有效支撑系统的设计优化.

### 3 系统设计优化

可用度和成本是系统设计优化中的两个重要评价指标<sup>[4]</sup>.本文以最小化系统总成本为目标,在满足系统可用度约束的条件下,研究系统中“子系统和部件的综合选择问题”,即在有限类型的子系统和部件中选择经济效益较高的组合,并确定组合中各类型单元的冗余度.优化问题的决策变量为组成单元的类型及其数量.设决策向量为 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ .其中: $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_I)$ 为部件层决策向量, $\mathbf{x}_i = (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iJ})$ ;  $\mathbf{X}_2 = (N_1, N_2, \dots, N_I)$ 为子系统层决策向量.

文献[13,22]的多态系统成本为部件成本及其数量的函数.其中,部件成本由单位成本与间接成本组成.本文逐层迭代将上述成本函数进行扩展.具体地,设子系统*i*的成本由单位成本 $C_0^i$ 与间接成本 $C_u^i(\mathbf{x}_i)$ 组成,即

$$C^i(\mathbf{x}_i) = C_0^i + C_u^i(\mathbf{x}_i), \quad (15)$$

$$C_u^i(\mathbf{x}_i) = C_0^{ij} + \sum_{j=1}^J n_{ij} \cdot C_u^{ij}. \quad (16)$$

其中: $C_0^i$ 为固定不变的值, $C_u^i(\mathbf{x}_i)$ 为所含部件单位成本 $C_0^{ij}$ 及间接成本 $C_u^{ij}$ 的函数.

系统总成本为各子系统成本之和,即

$$C(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^I N_i \cdot C^i(\mathbf{x}_i). \quad (17)$$

基于所提系统可用度模型及总成本函数,建立以下优化模型:

$$y = \min C(\mathbf{X}); \quad (18)$$

$$\text{s.t. } A(k_m, k_{m_i}) \geq \hat{A}, \quad (19)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq N_{ij}, \quad (20)$$

$$N_i \geq 1, \quad (21)$$

$$n_{ij}, N_i \in Z, i=1, 2, \dots, I, j=1, 2, \dots, J. \quad (22)$$

模型中,目标函数为系统总成本.约束条件(19)确保系统可用度不小于设计要求值 $\hat{A}$ ;约束条件(20)限定子系统*i*中部件*j*的数量不能高于 $N_{ij}$ , $N_{ij}$ 为常数,表示系统中各子系统配置部件数量的最大值;约束条件(21)确保系统中子系统*i*的数量不低于1;约束条件(22)确保各类型子系统和部件数量为整数.

上述优化问题为非线性整数规划问题,且可行解

随系统层次和单元数量的增加呈指数级增长.遗传算法(genetic algorithm, GA)作为一种启发式搜索算法,对目标函数的可导性和连续性要求较低,且全局收敛性较快,适用于较大规模系统的优化<sup>[25]</sup>.本文采用遗传算法,利用Matlab编程求解优化问题,基本步骤如下.

step 1: 根据决策变量取值范围初始化种群.由于优化模型的决策变量均为正整数,采用整数编码.设置染色体种群规模N-num,随机产生N-num个初始可行解个体,记为 $V_0 = (v_1, \dots, v_l, \dots, v_{N\text{-num}})$ .染色体 $v_l$ 表示可行解个体,其形式为

$$v_l = (n_{11}, \dots, n_{1J}, \dots, n_{I1}, \dots, n_{IJ}, N_1, \dots, N_I).$$

step 2: 根据个体适应度大小评估种群中个体的优劣,对个体进行选择,以保证适应性能好的个体有更多的机会繁殖后代,使优良性得以遗传.由于优化模型为有约束问题,利用惩罚因子将目标函数与非线性约束函数结合转化为无约束问题.个体 $v_l$ 对应的GA适应度函数为

$$f_l = C_l + \eta_1 \cdot \max(\hat{A} - A_l(k_m, k_{m_i}), 0) + \eta_2 \cdot \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \max(n_{ij} - N_{ij}, 0) + \eta_3 \cdot \sum_{i=1}^I \max(1 - N_i, 0), \quad (23)$$

其中 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 为惩罚因子.当约束条件满足时不予以惩罚,个体 $v_l$ 的适应度为 $C_l$ ;否则予以惩罚.

step 3: 父代种群经过选择、交叉、变异之后产生新一代种群.根据个体适应度对初始种群采用轮盘赌选择方式执行选择操作,确定父代种群.对父代种群作交叉概率为 $P_c$ 的多点交叉运算,产生种群 $V_{lc}$ ,再对种群 $V_{lc}$ 以变异概率 $P_m$ 作变异运算产生新种群 $V_{l+1}$ .

step 4: 判断迭代次数或种群平均适应度变化程度是否达到预设值:若达到,则终止计算,输出结果;否则返回执行step 2.

与文献[13,22]中仅优化底层部件不同,本文的优化模型可同时优化系统各层次单元的配置类型及数量.

### 4 算例分析

借鉴文献[22]的供电系统数据验证本文模型及方法的正确性和有效性.该系统包含 $N = 3$ 个并联子系统1和子系统2,分别由不同型号电源组成.依据各型号电源性能水平(输出功率)在充放电过程中的退化程度不同,将子系统1中的电源状态划分为0、

1、2, 子系统2的电源状态为0、1. 其中, 状态0为完全失效状态, 输出功率  $g_{0i} = 0 \text{ MW}$ . 系统处于状态  $m = 1$  及以上时视为可用. 此时, 系统运行的整体性能要求为  $k_1 = 1400 \text{ MW}$ , 子系统1和子系统2的性能要求分别为  $k_{1_1} = 350 \text{ MW}$ ,  $k_{1_2} = 400 \text{ MW}$ . 依据以上描述, 该系统为典型的双层多态加权  $k/n$  系统. 供电系统中子系统及电源的相关参数如表1所示.

表 1 供电系统中组件及电源相关参数

子系统	$N_i$	电源	$n_{ij}$	$g_{1i}/\text{MW}$	$g_{2i}/\text{MW}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{2,1}$	$\mu_{0,1}$	$\mu_{1,2}$
1	2	1	6	50	100	0.08	0.09	0.4	0.5
2	1	1	4	80	-	0.05	-	0.30	-
		2	3	100	-	0.06	-	0.35	-

### 4.1 供电系统可用度

依据第2节的建模步骤评价供电系统的可用度. 利用 Matlab 编程求解式(4)的微分方程, 并令  $t \rightarrow \infty$ , 计算子系统1中电源1的稳态概率分布. 由式(6)得到其 UGF 为

$$U_1(z) = 0.0212z^0 + 0.1058z^{50} + 0.873z^{100}.$$

类似地, 子系统2中电源1和电源2的UGF分别为

$$U_1(z) = 0.1423z^0 + 0.8577z^{80},$$

$$U_2(z) = 0.1466z^0 + 0.8534z^{100}.$$

基于电源 UGF, 利用并联组合算子  $\Omega_{\text{par}}$  分别生成子系统1和子系统2的初始UGF. 其中子系统1由  $n_{12} = 6$  个电源1并联组成, 有

$$U_1^0(z) = \Omega_{\text{par}}(U_1(z), U_1(z), U_1(z), U_1(z), U_1(z), U_1(z)) =$$

$$0.0001z^{250} + 0.0005z^{300} + 0.0031z^{350} +$$

$$0.0148z^{400} + 0.0548z^{450} + 0.162z^{500} +$$

$$0.3219z^{550} + 0.4427z^{600}.$$

类似地, 由  $n_{21} = 4$  个电源1和  $n_{22} = 3$  个电源2并联组成的子系统2的初始UGF为

$$U_2^0(z) = \Omega_{\text{par}}(U_1(z), U_1(z), U_1(z), U_1(z),$$

$$U_2(z), U_2(z), U_2(z)) =$$

$$0.0003z^{160} + 0.0005z^{180} + 0.0001z^{200} +$$

$$0.0011z^{240} + 0.0049z^{260} + 0.0032z^{280} +$$

$$0.0003z^{300} + 0.0017z^{320} + 0.0198z^{340} +$$

$$0.0286z^{360} + 0.0061z^{380} + 0.0298z^{420} +$$

$$0.115z^{440} + 0.0556z^{460} + 0.1733z^{520} +$$

$$0.2232z^{540} + 0.3364z^{620}.$$

由式(8)的运算符  $\delta_1$  和  $\delta_2$  得到子系统1和子系统

2的UGF为

$$U_1(z) = \delta_1(U_1^0(z), 350) =$$

$$0.0031z^{350} + 0.0148z^{400} + 0.0548z^{450} +$$

$$0.162z^{500} + 0.3219z^{550} + 0.4427z^{600},$$

$$U_2(z) = \delta_2(U_2^0(z), 400) =$$

$$0.0298z^{420} + 0.115z^{440} + 0.0556z^{460} +$$

$$0.1733z^{520} + 0.2232z^{540} + 0.3364z^{620}.$$

由式(10)生成系统UGF, 即

$$U(z) = \Omega_{\text{par}}(U_1(z), U_1(z), U_2(z)) =$$

$$0.0003z^{1290} + \dots + 0.0041z^{1420} +$$

$$0.0108z^{1440} + \dots + 0.0636z^{1690} +$$

$$0.1171z^{1720} + \dots + 0.0659z^{1820}.$$

最后, 由式(12)的运算符  $\delta$  得到系统可用度为

$$A(1400, 350, 400) = \delta(U(z), 1400) =$$

$$0.0041z^{1420} + \dots + 0.1171z^{1720} +$$

$$0.0437z^{1740} + \dots + 0.0659z^{1820} = 0.9321.$$

为进一步研究双层权重阈值对系统可用度的影响, 利用 Matlab 编程求解给定权重阈值下的系统可用度, 并绘制系统可用度  $A(k_1, k_{1_i})$  随系统层权重阈值  $k_1$  及子系统层权重阈值  $k_{1_i}$  变化的三维趋势图, 如图3所示.

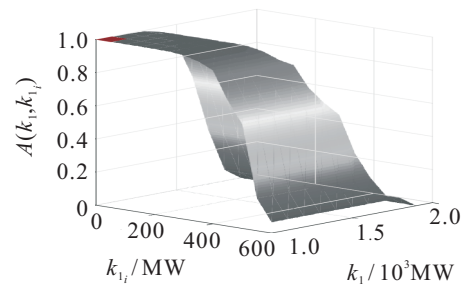


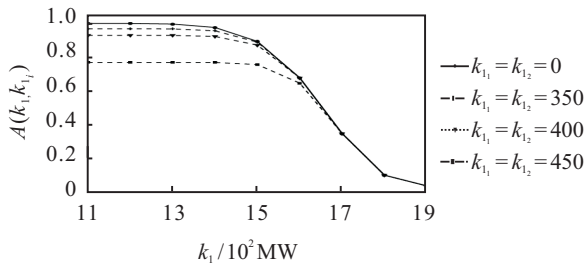
图 3 双层权重阈值下系统可用度的变化

图3展示了双层权重阈值下系统可用度变化的完整过程, 说明系统层权重阈值和子系统层权重阈值都会影响系统可用度, 且随着阈值的升高, 系统可用度呈非线性下降趋势.

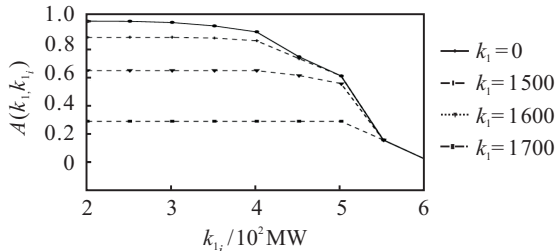
为了更直观地对比单一权重阈值与双层权重阈值下的可用度, 将单一系统层权重阈值 ( $k_{1_1} = k_{1_2} = 0 \text{ MW}$ ) 和子系统层权重阈值 ( $k_1 = 0 \text{ MW}$ ) 两种情形下的可用度与给定双层权重阈值下的可用度进行对比, 如图4所示.

由图4可知: 1) 相比考虑单一权重阈值的两种情形(实线所示), 双层权重阈值下的系统可用度(虚线所示)较低, 这是因为双层权重阈值的约束性更强, 系

统可用性要求更严格;2) 双层权重阈值情形下,系统层权重阈值或子系统权重阈值的升高会导致系统可用度降低;3) 单一系统层权重阈值的情形( $k_{1_1} = k_{1_2} = 0 \text{ MW}$ 且 $k_1 \neq 0 \text{ MW}$ )下,系统简化为多态加权 $k/n$ 系统,此时可用度随系统层权重阈值的升高而降低,这与文献[4]的结论一致. 以上结果验证了本文可用度建模方法的正确性及解决权重跨层次依赖问题的有效性,进一步表明了研究双层权重阈值的必要性.



(a) 系统层权重阈值与双层权重阈值的可用度对比



(b) 子系统层权重阈值与双层权重阈值的可用度对比

图4 单一权重阈值与双层权重阈值的可用度对比

### 4.2 供电系统冗余设计

现系统工程师需要扩大当前供电系统规模以满足更高的配电负荷. 已知高配电负荷下新系统及其子系统的性能要求为 $k_1 = 3000 \text{ MW}$ ,  $k_{1_1} = k_{1_2} = 500 \text{ MW}$ . 可选子系统及电源的相关参数见表2.

设计的目的是在满足可用度约束的条件下,优化选择子系统及电源的类型和冗余度(数量),以使系统总成本最低. 决策变量为 $n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{21}$ ,

$n_{22}, n_{23}, n_{24}, N_1, N_2$ .

由式(17)和(18)可得上述优化问题的GA适应度函数

$$f = \sum_{i=1}^I N_i \cdot \left( C_0^i + C_0^{ij} + \sum_{j=1}^J n_{ij} \cdot C_u^{ij} \right) + \eta_1 \cdot \max(\hat{A} - A(k_m, k_{m_i}), 0) + \eta_2 \cdot \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \max(n_{ij} - N_{ij}, 0) + \eta_3 \cdot \sum_{i=1}^I \max(1 - N_i, 0). \quad (24)$$

其中: $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 10000$ ,  $N_{ij} = 5$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$ .

利用Matlab执行GA,设置种群规模 $N\text{-num} = 500$ ,交叉率 $P_c = 0.8$ ,变异率 $P_m = 0.1$ ,最大迭代次数 $N\text{max-gen} = 200$ . 为避免遗传算法的随机性问题,重复运行20次取最好结果作为最优解,得到可用度设计要求值 $\hat{A} = 0.9, 0.95, 0.99$ 时的优化结果见表3. 结果说明,随着可用度设计要求值的提高,系统总成本升高.

为分析权重阈值对系统优化结果的影响,令 $\hat{A} = 0.9$ 不变,分别考虑单一系统层和子系统层权重阈值求解优化模型. 当 $k_{1_1} = k_{1_2} = 0 \text{ MW}$ ,  $k_1 = 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 \text{ MW}$ 时,得到各子系统和部件数量及系统总成本见表4;当 $k_1 = 0 \text{ MW}$ ,  $k_{1_1} = k_{1_2} = 250, 500, 750, 1000, 1250 \text{ MW}$ 时,给定子系统1和子系统2的数量为 $N_1 = N_2 = 1$ ,得到各部件数量及系统总成本见表5.

表4显示,系统层权重阈值越高,优化得到的子系统或部件数量越多,系统总成本越高. 与系统层权重阈值类似,子系统层权重阈值的升高也会导致单元数量增加,系统总成本升高,如表5所示. 因为权重阈

表2 可选子系统及电源相关参数

子系统型号	电源型号	$g_{1j}/\text{MW}$	$g_{2j}/\text{MW}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{2,1}$	$\mu_{0,1}$	$\mu_{1,2}$	$C_0^i/\text{元}$	$C_0^{ij}/\text{元}$	$C_u^{ij}/\text{元}$
1	1	50	100	0.08	0.09	0.4	0.5	100	50	18
	2	30	60	0.04	0.05	0.4	0.6			
	3	60	120	0.05	0.06	0.4	0.7			
2	1	80	-	0.05	-	0.30	-	120	60	30
	2	100	-	0.06	-	0.35	-			
	3	180	-	0.03	-	0.45	-			
	4	210	-	0.02	-	0.40	-			

表3 不同可用度设计要求值下的优化结果

可用度设计要求值 $\hat{A}$	子系统数量		电源数量							总成本/元	可用度
	$N_1$	$N_2$	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{13}$	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{23}$	$n_{24}$		
0.90	2	1	1	5	4	3	3	3	1	1541	0.9436
0.95	2	1	3	4	3	4	4	2	2	1568	0.9515
0.99	2	1	3	3	4	5	3	3	1	1573	0.9985

表 4 不同系统层权重阈值下的优化结果

系统层权重阈值 $k_1/\text{MW}$	子系统数量		电源数量								总成本 / 元	可用度
	$N_1$	$N_2$	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{13}$	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{23}$	$n_{24}$			
1000	1	1	2	1	3	1	1	1	1	1	716	0.990 1
2000	1	1	2	2	0	4	4	4	2	2	1076	0.963 0
3000	2	1	3	3	5	1	5	1	1	1	1533	0.983 6
4000	2	1	5	4	5	5	2	3	4	4	1980	0.978 2
5000	3	1	5	5	4	3	4	3	3	3	2405	0.907 3

表 5 不同子系统层权重阈值下的优化结果

子系统层权重阈值 $k_{1i}/\text{MW}$	电源数量								总成本 / 元	可用度
	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{13}$	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{23}$	$n_{24}$			
250	1	2	1	1	1	1	1	1	643	0.970 1
500	1	5	2	2	2	2	1	1	788	0.988 0
750	4	4	3	2	2	1	1	1	892	0.972 4
1000	4	4	4	1	2	4	1	1	1082	0.941 0
1250	5	4	5	2	2	3	5	5	1430	0.982 3

值越高,系统可用性要求越严格,为了满足可用度约束,需要配置更多的子系统或部件,从而需投入更高的成本.上述结果表明,在设计优化过程中,系统层和子系统层权重阈值都会影响单元数量及系统总成本,仅考虑单一权重阈值是不够的.

为进一步明确双层权重阈值对系统总成本的影响规律,并与单一权重阈值进行对比,令  $\hat{A} = 0.90$  不变,分别将单一系统层权重阈值 ( $k_{11} = k_{12} = 0 \text{ MW}$ ) 和子系统层权重阈值 ( $k_i = 0 \text{ MW}$ ) 两种情形下的成

的总成本更高.

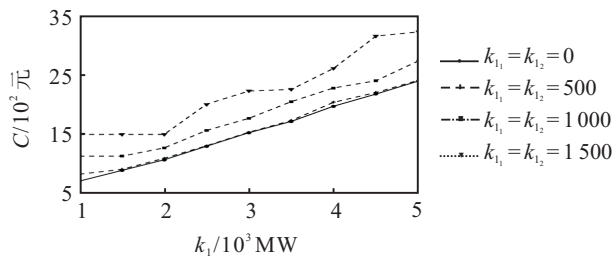
综合表 3~表 5 可知,本文优化模型不仅能解决系统设计中“子系统和部件的综合选择问题”,也能解决已知子系统数量的“部件选择问题”.与文献[22]中仅考虑部件数量的优化模型相比,本文优化模型的通用性和灵活性更强.

### 5 结 论

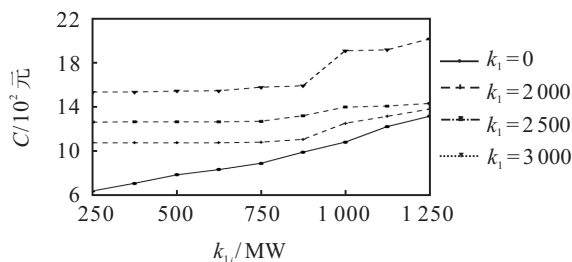
复杂多态系统可用性与经济性的综合研究是系统可靠性理论的重要组成部分.本文以双层多态加权  $k/n$  系统为研究对象,提出了更灵活通用的系统可用度模型和冗余设计优化方法.算例分析验证了方法及模型的正确性和有效性,结果显示:1) 权重阈值越高,表明系统可用性要求越严格,会导致优化后的系统总成本升高;2) 相比单一权重阈值,考虑双层权重阈值优化后的系统总成本更高,原因是双层权重阈值的约束更强.因此,在有双层性能要求的系统设计优化中,仅考虑放松的单一权重阈值的可用度约束条件,将导致设计优化结果不能满足任务要求.上述研究成果有助于系统工程师解决复杂系统设计中的性能提升和经济规模的综合决策问题,具有一定工程应用价值.

### 参考文献(References)

[1] Lisnianski A, Elmakias D, Laredo D, et al. A multi-state Markov model for a short-term reliability analysis of a power-generating unit[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2012, 98(1): 1-6.  
 [2] 尹东亮, 胡涛, 陈童. 考虑维修优先权的多状态温贮备系统可靠性模型[J]. 控制与决策, 2018, 33(11): 2029-2036.  
 (Yin D L, Hu T, Chen T. Reliability analysis for multi-state warm standby system with repair priority[J]. Control and



(a) 系统层权重阈值与双层权重阈值的可用度对比



(b) 子系统层权重阈值与双层权重阈值的可用度对比

图 5 单一权重阈值与双层权重阈值的成本对比

本与给定双层权重阈值情形下的成本进行对比,结果如图 5 所示.图 5 表明:1) 系统层和子系统层权重阈值的引入会影响系统总成本的优化结果,且随着权重阈值的升高呈上升趋势;2) 相比单一权重阈值(实线所示),双层权重阈值(虚线所示)下优化后的系统总成本更高.因为双层权重阈值的约束更强,导致优化后



- Decision, 2018, 33(11): 2029-2036.)
- [3] 李婧, 陈光宇, 张小民, 王瑞琦. 考虑随机权重阈值的多态  $k/N$  系统任务可用度建模与优化[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(12): 3235-3243.  
(Li J, Chen G Y, Zhang X M, et al. Mission-availability modeling and optimization of multi-state  $k/N$  systems under random weight threshold[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2018, 38(12): 3235-3243.)
- [4] Faghh R S, Xie M, G K M, et al. Dynamic availability assessment and optimal component design of multi-state weighted  $k$ -out-of- $n$  systems[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2014, 123(4): 57-62.
- [5] Larsem E M, Ding Y, Li Y F, et al. Definitions of generalized multi-performance weighted multi-state  $k$ -out-of- $n$  system and its reliability evaluations[DB/OL]. (2017-06-21) [2018-12-21]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832017306877>.
- [6] Levitin G. The universal generating function in reliability analysis and optimization[M]. London: Springer-Verlag, 2005: 67-98.
- [7] Ding Y, Zuo M J, Lisnianski A, et al. A framework for reliability approximation of multi-state weighted  $k$ -out-of- $n$  systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2010, 59(2): 297-308.
- [8] Xiao H, Shi D M, Ding Y, et al. Optimal loading and protection of multi-state systems considering performance sharing mechanism[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2016, 149(5): 88-95.
- [9] Wang G, Duan F, Zhou Y. Reliability evaluation of multi-state series systems with performance sharing[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2018, 173(5): 58-63.
- [10] Li Y F, Peng R. Availability modeling and optimization of dynamic multi-state series-parallel systems with random reconfiguration[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2014, 127(7): 47-57.
- [11] Li W, Zuo M J. Reliability evaluation of multi-state weighted  $k$ -out-of- $n$  systems[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(1): 160-167.
- [12] Levitin G, Lisnianski A, Ben-Haim H, et al. Redundancy optimization for series-parallel multi-state systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1998, 47(2): 165-172.
- [13] Li C Y, Chen X, Yi X S, et al. Heterogeneous redundancy optimization for multi-state series-parallel systems subject to common cause failures[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2010, 95(3): 202-207.
- [14] Lai Y M, Wei C. Two-stage simplified swarm optimization for the redundancy allocation problem in a multi-state bridge system[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2016, 156(12): 156-158.
- [15] Zhang P, Ma Q S. A method of evaluation reliability of more-electric-aircraft power system using node-weighted network[J]. Advanced Materials Research, 2012, 516(5): 1288-1291.
- [16] Ding Y, Zuo M J, Tian Z G, et al. The hierarchical weighted multi-state  $k$ -out-of- $n$  system model and its application for infrastructure management[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2010, 59(3): 593-603.
- [17] Chen Y, Yang Q. Reliability of two-stage weighted  $k$ -out-of- $n$  systems with components in common[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2005, 54(3): 431-440.
- [18] Sun M X, Li Y F, Zio E. On the optimal redundancy allocation for multi-state series-parallel systems under epistemic uncertainty[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2019, 192(12): 101-118.
- [19] Guilani P P, Sharifi M, Nlaki S T A, et al. Redundancy allocation problem of a system with three-state components: A genetic algorithm[J]. International Journal of Engineering, 2014, 27(11): 1663-1672.
- [20] Feizabadi M, Jahromi A E. A new model for reliability optimization of series-parallel systems with non-homogeneous components[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2017, 157(2): 101-112.
- [21] Khorshidi H A, Gunawan I, Ibrshim M Y. A value-driven approach for optimizing reliability-redundancy allocation problem in multi-state weighted  $k$ -out-of- $n$  system[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2016, 40(3): 54-62.
- [22] Tian Z G, Zuo M J, Huang H Z. Reliability-redundancy allocation for multi-state series-parallel systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2008, 57(2): 303-310.
- [23] Li M Y, Liu J, Li J, et al. Bayesian modeling of multi-state hierarchical systems with multi-level information aggregation[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2014, 124(4): 158-164.
- [24] Chen G Y, Huang X Z, Tang X W. Reliability analysis of hierarchical systems with imperfect coverage[J]. Journal of Systems Engineering, 2005, 20(5): 504-510.
- [25] Hassan H, Amiri M, Sharifi M. Redundancy allocation in series-parallel systems under warm standby and active components in repairable subsystem[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2019, 192(12): 1-18.

### 作者简介

李婧(1988—), 女, 博士生, 从事系统可靠性建模与优化的研究, E-mail: 13668280429@163.com;

陈光宇(1969—), 男, 教授, 博士生导师, 从事质量管理与系统可靠性工程等研究, E-mail: chenguangyu@uestc.edu.cn;

唐菱(1986—), 女, 副研究员, 从事高功率激光装置可靠性的研究, E-mail: atl1234@163.com;

王瑞琦(1988—), 女, 博士生, 从事系统可靠性分析与成本优化的研究, E-mail: 451847987@qq.com.

(责任编辑: 闫 妍)