

# 库存水平影响需求下变质品订购、定价和 保鲜技术投资的联合决策

江文辉<sup>1</sup>, 丁小东<sup>3</sup>, 李延来<sup>1,2†</sup>, 徐菱<sup>1,2</sup>

(1. 西南交通大学 交通运输与物流学院, 成都 611756; 2. 西南交通大学 综合交通运输智能化国家地方联合工程实验室, 成都 611756; 3. 中国铁道科学研究院集团有限公司 运输及经济研究所, 北京 100081)

**摘要:** 研究变质品的订购、定价和保鲜技术投资联合决策问题. 假设产品需求同时受价格和库存水平的影响, 系统不允许缺货并放松期末库存水平为零的约束, 零售商拥有有限的货架空间或存储空间, 同时考虑零售商可以通过投资保鲜技术减低产品的变质率, 以平均利润最大化为目标构建库存水平影响需求下变质品的订购、定价和保鲜技术投资联合决策模型. 首先证明最优策略的存在性和唯一性, 并给出零售商建立期末库存的条件; 然后利用最优解的相关性质设计一个求解模型的多阶段迭代算法; 最后通过具体算例验证展示模型和算法的可行性和实用性, 并完成相关参数的敏感性分析, 获得一定的管理启示.

**关键词:** 变质品; 库存水平影响需求; 订购; 定价; 保鲜技术投资

中图分类号: F253; O227

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0195

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 江文辉, 丁小东, 李延来, 等. 库存水平影响需求下变质品订购、定价和保鲜技术投资的联合决策[J]. 控制与决策, 2020, 35(11): 2578-2588.

## Ordering, pricing and preservation technology investment decision for perishable items with inventory-level-dependent demand

JIANG Wen-hui<sup>1</sup>, DING Xiao-dong<sup>3</sup>, LI Yan-lai<sup>1,2†</sup>, XU Ling<sup>1,2</sup>

(1. School of Transportation & Logistic, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China; 2. National and Combined Engineering Lab of Intelligentizing Integrated Transportation, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China; 3. Transportation & Economics Research Institute, China Academy of Railway Sciences Corporation Limited, Beijing 100081, China)

**Abstract:** This paper studies a joint ordering, pricing and preservation investment decision problem for perishable items. It is assumed that the demand rate is dependent on price and inventory level simultaneously, shortages are not allowed and the restriction of zero ending-inventory is relaxed. And meanwhile considering that the deterioration rate can be controlled by employing a certain preservation technology and the retailer has limited shelf space or storage space. The inventory model of the joint ordering, pricing and preservation investment decision for deteriorating items with inventory-level-dependent demand is proposed with the goal of maximizing the retailer's average profit. First, it is proved that the optimal policy not only exists but also unique, and we also provide the conditions for retailer to build up inventory. Then, an iterative algorithm is designed to find the optimal solution according to the relevant properties of the model. Finally, the numerical example is given to illustrate the feasibility and practicability of the model and algorithm, and the sensitivity analysis of relevant parameters is carried out and some managerial insights are derived.

**Keywords:** perishable items; inventory-level-dependent demand; ordering; pricing; preservation technology investment

## 0 引言

经典的库存模型通常假设外部市场需求为常数或时变情形. 然而, 在现实生活中超市和大卖场等零售场所的货架上展示的某一种商品越多, 其

销量越多. Levin<sup>[1]</sup> 最早注意到上述现象, 并将该现象称为需求依赖库存水平 (inventory-level-dependent demand). 随后, Peterson 等<sup>[2]</sup> 也证实了这种库存现象, 并发现商品的销售量与其展示的库存水平存在近似

收稿日期: 2019-02-24; 修回日期: 2019-05-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371156, 71872153); 西南交通大学博士研究生创新基金项目.

责任编辑: 李勇建.

†通讯作者. E-mail: lyl\_2001@163.com.

正比的关系. Gupta等<sup>[3]</sup>首次将这种现象量化并引入到库存模型,认为需求率是初始库存水平的一个函数. 随后, Baker等<sup>[4]</sup>进一步修正了Gupta等<sup>[3]</sup>的模型,认为需求率是瞬时库存水平的函数,并提出了一个指数型的需求函数. Urban<sup>[5]</sup>对库存水平影响需求问题进行了全面的评述.

变质品在日常生活中随处可见,例如水果、蔬菜、肉类、牛奶等食物以及药品、挥发性液体等. Mandal等<sup>[6]</sup>最早考虑变质品的库存水平影响需求问题,并提出需求率是一个瞬时库存水平的线性函数. Dye等<sup>[7]</sup>应用上述线性需求函数探讨了允许缺货且缺货部分延迟订购的EOQ模型. Chang等<sup>[8]</sup>考虑不允许缺货并放松期末库存水平为零的约束对文献[7]的模型进行了拓展. Wu等<sup>[9]</sup>进一步考虑非瞬时变质产品,构建了一个平均成本最小化的EOQ模型. Soni<sup>[10]</sup>考虑延迟支付情形,探讨了一类库存水平影响需求的库存模型. Pando等<sup>[11]</sup>针对具有时变库存持有成本的变质品,以平均利润最大化为目标构建了库存水平影响需求下库存模型. Tiwari等<sup>[12]</sup>和 Shaikh等<sup>[13]</sup>考虑库存水平影响需求分别探讨了两货栈情形和带全量价格折扣情形下的变质品库存策略.

上述研究成果为零售商解决库存水平影响需求下的库存控制问题提供了很好的参考,但上述研究均假定产品的零售价格和变质率为外生变量. 然而,在市场竞争日益激烈的环境下,零售商通过调整价格管理产品需求一直被认为是增加收益和保持竞争力的一种最有效方法. Hou等<sup>[14]</sup>假设需求同时受到库存水平和价格的影响,并且考虑了资金的时间价值,研究了允许缺货情形下定价和订购的联合问题. 霍佳震等<sup>[15]</sup>在允许短缺并延迟订购情形下,构建了需求受到库存水平影响下易逝品的联合定价和生产模型. 计国君等<sup>[16]</sup>考虑需求同时受库存水平和价格的影响,构建了多个供应商、多个零售商情况下,供应商库存外包予第三方的易逝品联合定价和库存决策模型. Lu等<sup>[17]</sup>同样考虑需求受库存水平和价格的影响,利用最大值原理研究了变质品的动态定价和库存策略. 曹裕等<sup>[18]</sup>基于预付款情形下研究了非瞬时变质品的联合定价和批量问题. Feng等<sup>[19]</sup>、Chen等<sup>[20]</sup>和 Agi等<sup>[21]</sup>假定需求同时受价格、库存水平和时间的影响,探讨了不同情形下变质品的订购和定价问题. Hsieh等<sup>[22]</sup>、李贵萍等<sup>[23]</sup>和 Li等<sup>[24]</sup>引入参考价格的效应,探讨了易变质品的定价和库存控制问题.

产品的变质率可以通过对存储设备(如冷藏等)、包装技术(真空包装、打蜡等)等进行有效的投资而

得到一定程度的控制. Richards<sup>[25]</sup>曾指出,零售业每减少20%的变质商品浪费,可以增加33%的收益. 因此,研究变质品的保鲜技术投资问题同样具有重要的现实意义. Lee等<sup>[26]</sup>考虑需求是库存水平的线性函数,研究了允许缺货且缺货延迟订购情形下易逝品的订购和保鲜技术投资问题. Mishra等<sup>[27]</sup>考虑有限规划时域内零售商进行等周期补货,研究了变质品的联合补货和保鲜技术投资策略. Bardhan等<sup>[28]</sup>针对非瞬时变质产品,假定需求率是瞬时库存水平的指数函数,研究了订购和保鲜技术投资的联合问题,其所建模型不允许短缺且期末库存水平约束为零.

虽然学者们已经开始关注库存水平影响需求下的变质品定价或保鲜技术投资问题,但是针对该情境下变质品订购、定价和保鲜技术投资策略的综合优化问题还较少有学者探讨. 基于此,本文将考虑一个不允许缺货的变质品库存系统,同时放松期末库存水平为零的约束,且假定零售商拥有有限的存储空间,产品的市场需求同时受库存水平和零售价格的影响,以平均利润最大化为目标构建了相应的库存模型,目的是为零售商寻找最优订购、定价和保鲜技术投资策略. 主要工作包括:

1) 考虑产品需求受价格和库存水平的影响且产品的变质率可通过投资保鲜技术得到控制,同时优化变质品的订购、定价和保鲜技术投资决策;

2) 放松零售商订购周期期末库存水平为零的约束,并考虑零售商拥有有限的存储空间或货架空间这一现实情境进行库存建模;

3) 给出零售商持有期末库存的条件及最优策略的相关性质,并设计相应的迭代算法完成对模型的求解.

## 1 符号说明与假设

### 1.1 符号说明

本文建模用到的符号描述如下:  $A$ 为零售商的固定订货成本,  $c$ 为单位产品的采购成本,  $h$ 为单位产品单位时间的库存持有成本,  $\theta$ 为产品的变质率且满足  $0 < \theta < 1$ ,  $I(t)$ 为 $t$ 时刻零售商产品的库存水平,  $q$ 为一个补货周期内零售商的订购量,  $\xi$ 为零售商单位时间的保鲜技术投资成本且满足  $\xi \geq 0$ (决策变量),  $E$ 为零售商单个补货周期的期末库存水平且满足  $E \geq 0$ (决策变量),  $p$ 为产品的零售价格且满足  $p > c$ (决策变量),  $T$ 为零售商补货周期的长度且满足  $T > 0$ (决策变量),  $TP(T, p, \xi, E)$ 为一个补货周期内零售商的总利润,  $ATP(T, p, \xi, E)$ 为一个补货周期内零售商单位时间的平均利润.

1.2 基本假设

1) 考虑单一变质产品的库存系统, 计划时域无限且订货提前期为零.

2) 在一个补货周期内已变质产品必须立即离开库存系统不会被修缮或补充.

3) 市场需求同时依赖于产品价格  $p$  和瞬时库存水平  $I(t)$ , 本文采用 Mandal 等<sup>[6]</sup> 提出的库存水平影响需求的线性形式, 定义需求函数为

$$D(p, I(t)) = \alpha(p) + \beta I(t),$$

其中  $0 < \beta < 1$  表示库存水平对需求的影响大小. 此外, 假设  $\alpha(p)$  是关于价格  $p$  的任意非负、连续和递减的凸函数, 且收益率函数  $p\alpha(p)$  是关于  $p$  的严格凹函数, 即  $p\alpha''(p) + 2\alpha'(p) < 0$ .

4) 产品的变质率  $\theta (0 < \theta < 1)$  为常数, 但零售商可以通过投资相应的保鲜技术 (如温控设备、真空包装、打蜡等) 降低产品的变质率, 定义  $m(\xi)$  为零售商单位时间的保鲜技术, 投资成本为  $\xi$  时可使变质率减少量. 不失一般性, 假设  $m(\xi)$  是关于  $\xi$  的单调递增凹函数, 且满足  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = \theta$ , 该假设暗示着资本的边际报酬递减.

5) 在实际生活中, 大多数零售商店的货架空间或存储空间是有限的, 因此, 假设零售商的最大货架空间 (或存储空间) 为  $W$ , 即在一个补货周期内的库存水平需要满足  $I(t) \leq W$ .

6) 库存系统不允许缺货. 另外, Urban<sup>[5]</sup> 指出: “当考虑库存水平影响需求时, 零售商倾向于订购更多的产品, 目的是获取增加的需求所带来的潜在利润, 但是结果也可能导致补货周期末零售商有库存剩余.” 基于此, 本文将放松期末库存水平为 0 这一严格约束, 定义期末库存满足  $I(t) = E$ , 其中  $E \geq 0$ .

2 模型构建

基于上述分析和假定, 本文探讨的库存系统运作过程如下: 在  $t = 0$  时刻, 零售商向上游供应商订购  $q$  单位的产品满足一个订货周期的需求, 然后在市场需求和产品变质的共同作用下, 产品的库存水平不断下降, 直至当库存水平降低至  $I(t) = E$  时, 零售商开始下一订货周期运作.

具体地, 在时间段  $[0, T]$  内, 库存水平的变化满足如下微分方程:

$$I'(t) = -\alpha(p) - \beta I(t) - [\theta - m(\xi)]I(t). \quad (1)$$

利用边界条件  $I(t) = E$ , 可解得上述微分方程为

$$I(t) = \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)} [e^{(\beta + \theta - m(\xi))(T-t)} - 1] +$$

$$Ee^{(\beta + \theta - m(\xi))(T-t)}. \quad (2)$$

利用式 (2) 可知, 补货周期内产品订购量为

$$q = I(0) - E = \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)} [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - 1] + E[e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - 1]. \quad (3)$$

零售商一个补货周期内利润构成分别为:

1) 采购成本  $cq$ ;

2) 库存持有成本

$$h \int_0^T I(t) dt = \frac{h\alpha(p)}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] + \frac{hE}{\beta + \theta - m(\xi)} [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - 1];$$

3) 固定订购成本  $A$ ;

4) 保鲜技术投资成本  $\xi T$ ;

5) 销售收益

$$p \int_0^T \alpha(p) + \beta I(t) dt = p\alpha(p)T + \frac{\beta p\alpha(p)}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] + \frac{pE}{\beta + \theta - m(\xi)} [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - 1].$$

一个补货周期内零售商的总利润为

$$TP(T, p, \xi, E) = (p - c)\alpha(p)T + \frac{\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] + \frac{E[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - 1] - A - \xi T. \quad (4)$$

进一步可知, 零售商在一个订购周期的平均利润为

$$ATP(T, p, \xi, E) = \frac{TP(T, p, \xi, E)}{T}. \quad (5)$$

3 模型分析与求解

模型以平均利润函数  $ATP(T, p, \xi, E)$  最大化为目标, 其最优解是零售商变质品订购、定价和保鲜技术投资的最优策略  $(T^*, p^*, \xi^*, E^*)$ . 考虑到该目标函数的复杂性, 很难利用解析方法求证目标函数  $ATP(T, p, \xi, E)$  是关于决策变量  $(T, p, \xi, E)$  的联合凹函数并同时求出模型最优策略的显示解. 因此, 第 3.1 节将首先对模型相关特性进行有效分析以证明最

优解的存在性和唯一性,进而在第 3.2 节根据最优解的相关性质设计一个相应的迭代算法.

3.1 模型的相关性质

**定理 1** 对于任意给定的  $T$ 、 $E$  和  $\xi$ , 平均利润函数  $ATP(p|\xi, T, E)$  是关于  $p$  的严格凹函数, 且存在唯一的最优零售价格  $p^*$  满足如下方程:

$$\alpha(p)T + (p - c)\alpha'(p)T + \frac{\beta\alpha(p) + \alpha'(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] + \frac{E\beta}{\beta + \theta - m(\xi)} [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1] = 0. \quad (6)$$

**证明** 对平均利润函数  $ATP(p|\xi, T, E)$  分别求其关于价格  $p$  的一阶和二阶偏导数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial ATP(p|\xi, T, E)}{\partial p} &= \frac{1}{T} \left\{ \alpha(p)T + (p - c)\alpha'(p)T + \frac{\beta\alpha(p) + \alpha'(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] + \frac{E\beta}{\beta + \theta - m(\xi)} [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1] \right\}, \\ \frac{\partial^2 ATP(p|\xi, T, E)}{\partial p^2} &= \frac{1}{T} \left\{ 2\alpha'(p)T + (p - c)\alpha''(p)T + \frac{2\beta\alpha''(p) + \alpha''(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] \right\}. \end{aligned}$$

由假设  $\alpha(p)$  是关于价格  $p$  的任意非负、连续、递减的凸函数, 且  $p\alpha''(p) + 2\alpha'(p) < 0$ , 易证  $\partial^2 ATP(p|\xi, T, E)/\partial p^2 < 0$ , 即  $ATP(p|\xi, T, E)$  是关于  $p$  的严格凹函数, 因此存在唯一最优解  $p^*$  满足  $\frac{\partial ATP(p|\xi, T, E)}{\partial p} = 0$ , 整理可得方程 (6).  $\square$

**定理 2** 对于任意的  $T$ 、 $E$  和  $p$ , 平均利润函数  $ATP(\xi|p, T, E)$  是关于  $\xi$  的严格凹函数, 且存在唯一的最优保鲜技术投资水平  $\xi^*$  满足如下方程:

$$\begin{aligned} \frac{m'(T)\alpha(p)}{T} \left\{ \frac{c[e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} + \frac{2[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^3} \times [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] + \frac{T[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times [1 - e^{(\beta+\theta-m(\xi))T}] \right\} + \frac{m'(\xi)E}{T} \left\{ \frac{c[e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1]}{\beta + \theta - m(\xi)} + \frac{p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1] - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]T}{\beta + \theta - m(\xi)} e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} \right\} = 1. \quad (7)$$

**证明** 利用指数函数的泰勒展开式, 将  $e^{(\beta+\theta-m(\xi))T}$  分别展开到前 3 项和前 2 项, 并忽略其余更高阶项, 即

$$\begin{aligned} e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} &= 1 + (\beta + \theta - m(\xi))T + \frac{1}{2}[(\beta + \theta - m(\xi))T]^2, \\ e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} &= 1 + (\beta + \theta - m(\xi))T. \end{aligned}$$

分别代入式 (4), 化简得到

$$\begin{aligned} TP(\xi|p, T, E) &= (p - c)\alpha(p)T + \frac{1}{2}\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))] + E[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))] - A - \xi T. \end{aligned}$$

易证

$$\frac{\partial^2 TP(\xi|p, T, E)}{\partial \xi^2} = \left[ \frac{1}{2}\alpha(p) + E \right] cm''(\xi) < 0.$$

因为  $\frac{\partial^2 ATP(\xi|p, T, E)}{\partial \xi^2} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 TP(\xi|p, T, E)}{\partial \xi^2}$ , 所以  $\frac{\partial^2 TP(\xi|p, T, E)}{\partial \xi^2} < 0$ , 即平均利润函数  $ATP(\xi|p, T, E)$  是关于  $\xi$  的严格凹函数. 因此, 存在唯一最优解  $\xi^*$  满足  $\partial ATP(\xi|p, T, E)/\partial \xi = 0$ , 整理可得方程 (7).  $\square$

定理 1 和定理 2 分别给出了在给定的  $T$ 、 $E$  和  $\xi$  (或  $p$ ) 的情形下, 最优零售价格  $p$  (或最优保鲜技术投资  $\xi$ ) 存在且唯一的充分必要条件. 因此, 在实际商业运营中, 利用定理 1 和定理 2 的性质, 零售商可以有效制定产品的零售价格和保鲜技术投资水平以实现系统最优.

**引理 1** 对于任意给定的  $p$  和  $\xi$ , 将决策变量  $T$  和  $E$  所构成的可行域集合定义为

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (T, E) : T > 0, E \geq 0, \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha(p)}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1] + Ee^{(\beta+\theta-m(\xi))T} \leq W \right\}, \end{aligned}$$

则有:

- 1) 可行域集合  $\Omega$  为凸集且是紧的;
- 2) 平均利润函数  $ATP(T, E|p, \xi)$  将在可行域集合  $\Omega$  的边界处取到全局最大值.

**证明** 1) 易证  $\frac{\alpha(p)}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1] + Ee^{(\beta+\theta-m(\xi))T}$  是关于  $(T, E)$  的联合凸函数, 且  $T > 0$  与  $E \geq 0$  为线性约束, 因此可行域集合  $\Omega$  为凸集. 注意到, 对于任意给定可行的  $T > 0$  和  $E \geq 0$ , 需要满足约束条件

$$\frac{\alpha(p)}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1] +$$

$$Ee^{(\beta+\theta-m(\xi))T} \leq W,$$

排除  $T = +\infty$  与  $E = +\infty$  的情形. 综上, 可行域集合  $\Omega$  为凸集且是紧的.

2) 求平均利润函数  $ATP(T, E|p, \xi)$  关于  $E$  的一阶和二阶偏导数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial ATP(T, E|p, \xi)}{\partial E} &= \frac{1}{T} \frac{[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} \times [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1], \\ \frac{\partial^2 ATP(T, E|p, \xi)}{\partial E^2} &= 0. \end{aligned}$$

构造  $ATP(T, E|p, \xi)$  关于  $(T, E)$  的黑塞矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 ATP}{\partial E^2} & \frac{\partial^2 ATP}{\partial T \partial E} \\ \frac{\partial^2 ATP}{\partial T \partial E} & \frac{\partial^2 ATP}{\partial T^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial^2 ATP}{\partial T \partial E} \\ \frac{\partial^2 ATP}{\partial T \partial E} & \frac{\partial^2 ATP}{\partial T^2} \end{bmatrix}.$$

显然  $|H| = -\left(\frac{\partial^2 ATP}{\partial T \partial E}\right)^2 < 0$ , 可知  $ATP(T, E|p, \xi)$  关于  $(T, E)$  的黑塞矩阵不是负定矩阵, 因此  $ATP(T, E|p, \xi)$  不存在内部极大值点. 由  $ATP(T, E|p, \xi)$  在可行域集合  $\Omega$  (紧凸集) 上连续可微, 根据 Weierstrass 定理,  $ATP(T, E|p, \xi)$  在  $\Omega$  上必存在全局最大值. 综上, 平均利润函数  $ATP(T, E|p, \xi)$  必定在可行域集合  $\Omega$  的边界处取到全局最大值.  $\square$

引理 1 表明, 当  $p$  和  $\xi$  已知时, 最优补货周期  $T$  和期末库存水平  $E$  将在  $\Omega$  的边界处取得. 进一步易知,  $ATP(T, E|p, \xi)$  关于  $E$  的单调性与  $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\beta))$  的正负有关. 因此, 存在以下两种情况:

1) 当  $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\beta)) \geq 0$  时,  $\partial ATP(T, E|p, \xi) / \partial E \geq 0$ , 即  $ATP(T, E|p, \xi)$  是关于  $E$  的增函数, 此时  $ATP(T, E|p, \xi)$  将在

$$E = \left[ W + \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)} \right] e^{-(\beta+\theta-m(\xi))T} - \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)}$$

处取得最大值.

2) 当  $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\beta)) < 0$  时,  $\partial ATP(T, E|p, \xi) / \partial E > 0$ , 即  $ATP(T, E|p, \xi)$  是关于  $E$  的减函数, 此时  $ATP(T, E|p, \xi)$  将在  $E = 0$  处取得最大值. 事实上,  $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\beta))$  可以理解为持有额外单位库存所获得的收益  $(p - c)\beta$  与持有额外库存需要付出的成本  $h + c(\theta - m(\xi))$  之差. 如果  $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\beta)) \geq 0$ , 则表明零售商持有额外库存所带来的收益大于需要付出的成本, 因此将商品库存建立到最大允许水平对零售商而言是最优的选择, 反之, 零售商将没有动力建立期末库存, 这与现实情形一致.

下面将分两种情况展开讨论:

$$1) p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi)) \geq 0.$$

该情形下, 零售商持有额外库存水平是有利的, 因此, 零售商会将其商品库存建立到最大允许水平, 即

$$E = \left[ W + \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)} \right] e^{-(\beta+\theta-m(\xi))T} - \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)}.$$

将其代入式 (5), 目标函数  $ATP(T, E|p, \xi)$  可以重述为

$$\begin{aligned} ATP(T|p, \xi) &= \frac{1}{T} \left\{ (p - c)\alpha(p)T + \frac{\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times \right. \\ &\quad \left. [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] + \frac{[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} \times \right. \\ &\quad \left. \left[ W(1 - e^{-(\beta+\theta-m(\xi))T}) + \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)} (2 - e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - e^{-(\beta+\theta-m(\xi))T}) \right] - A - \xi T \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

**引理 2** 对于任意给定的  $p$  和  $\xi$ , 若  $p$  和  $\xi$  满足  $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi)) \geq 0$ , 则平均利润函数  $ATP(T|p, \xi)$  存在唯一全局极大值点  $T_1$  满足如下等式:

$$\begin{aligned} A + \frac{T[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} \times \left\{ \alpha(p)[e^{-(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1] + [\beta + \theta - m(\xi)]W e^{-(\beta+\theta-m(\xi))T} \right\} = \\ \frac{\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] + \\ \frac{[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} \times \left\{ W[1 - e^{-(\beta+\theta-m(\xi))T}] + \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)} [2 - e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - e^{-(\beta+\theta-m(\xi))T}] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

**证明** 根据式 (8), 对  $ATP(T|p, \xi)$  求其关于  $T$  的一阶导数, 有

$$\frac{\partial ATP(T|p, \xi)}{\partial T} = \frac{L_1(T)}{T^2}.$$

其中

$$\begin{aligned} L_1(T) &= A + \frac{T\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} \times \\ &\quad [e^{(\beta+\theta-m(\xi))T} - 1] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{T[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} \times \\ & [(\beta + \theta - m(\xi))W e^{-(\beta + \theta - m(\xi))T} + \\ & \alpha(p)(e^{-(\beta + \theta - m(\xi))T} - e^{(\beta + \theta - m(\xi))T})] - \\ & \frac{\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times \\ & [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] - \\ & \frac{[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} \times \\ & \left\{ W(1 - e^{-(\beta + \theta - m(\xi))T}) + \right. \\ & \left. \frac{[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} [2 - e^{-(\beta + \theta - m(\xi))T} - \right. \\ & \left. e^{(\beta + \theta - m(\xi))T}] \right\}. \end{aligned}$$

对  $L_1(T)$  求关于  $T$  的一阶导数, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1(T)}{\partial T} = & -T[\alpha(p) + (\beta + \theta - m(\xi))W][p\beta - \\ & h - c(\beta + \theta - m(\xi))]e^{-(\beta + \theta - m(\xi))T} < 0. \end{aligned}$$

可知,  $L_1(T)$  是关于  $T \in (0, +\infty)$  的单调递减函数, 且  $\lim_{T \rightarrow 0^+} L_1(T) = A$ ,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} L_1(T) = -\infty$ , 因此存在唯一的  $T_1$  满足  $\frac{\partial \text{ATP}(T|p, \xi)}{\partial T} = 0$ . 在  $T = T_1$  处, 对  $\text{ATP}(T|p, \xi)$  求其关于  $T$  的二阶导数, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \text{ATP}(T|p, \xi)}{\partial T^2} \Big|_{T=T_1} = & -\frac{p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))}{T_1} \times \\ & [\alpha(p) + (\beta + \theta - m(\xi))W]e^{-(\beta + \theta - m(\xi))T_1} \leq 0. \end{aligned}$$

由上式可知, 不动点  $T_1$  为  $\text{ATP}(T|p, \xi)$  的全局极大值点. 进一步, 通过整理方程  $\partial \text{ATP}(T|p, \xi) / \partial T = 0$  可得到式(9).  $\square$

2)  $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi)) < 0$ .

同理, 在该情形下, 零售商建立期末库存是不利的. 对零售商而言, 期末库存水平为 0 是最优的结果. 将  $E = 0$  代入式(5), 目标函数  $\text{ATP}(T, E|p, \xi)$  可以重述为

$$\begin{aligned} \text{ATP}(T|p, \xi) = & \frac{1}{T} \left\{ (p - c)\alpha(p)T + \right. \\ & \left. \frac{\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times \right. \\ & \left. [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1] - A - \xi T \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

**引理 3** 对于任意给定的  $p$  和  $\xi$ , 若满足  $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi)) < 0$ , 则平均利润函数  $\text{ATP}(T|p, \xi)$  存

在唯一全局极大值点  $T_2$ , 且  $T_2$  满足下式:

$$T_2 = \begin{cases} T_0, & T_0 < \bar{T}; \\ \bar{T}, & T_0 \geq \bar{T}. \end{cases} \tag{11}$$

其中  $T_0$  为  $\partial \text{ATP}(T|p, \xi) / \partial T = 0$  的解, 且有

$$\bar{T} = \frac{1}{\beta + \theta - m(\xi)} \ln \left[ \frac{W(\beta + \theta - m(\xi))}{\alpha(p)} + 1 \right].$$

类似地, 引理 2 和引理 3 分别给出了在给定零售价格  $p$  和保鲜技术投资水平  $\xi$  的情形下, 零售商的最优补货策略存在且唯一的充分必要条件, 这就为零售商管理库存水平影响需求的变质品订购问题提供了决策依据.

**证明** 根据式(10), 对  $\text{ATP}(T|p, \xi)$  求其关于  $T$  的一阶导数, 有

$$\frac{\partial \text{ATP}(T|p, \xi)}{\partial T} = \frac{L_2(T)}{T^2}.$$

其中

$$\begin{aligned} L_2(T) = & A + \frac{T\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{\beta + \theta - m(\xi)} \times \\ & [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - 1] - \\ & \frac{\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{[\beta + \theta - m(\xi)]^2} \times \\ & [e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} - (\beta + \theta - m(\xi))T - 1]. \end{aligned}$$

对  $L_2(T)$  求其关于  $T$  的一阶导数, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2(T)}{\partial T} = & T\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))] \times \\ & e^{(\beta + \theta - m(\xi))T} < 0. \end{aligned}$$

易知  $L_2(T)$  是关于  $T$  的单调递减函数, 且  $\lim_{T \rightarrow 0^+} L_2(T) = A$ ,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} L_2(T) = -\infty$ , 因此方程  $\frac{\partial \text{ATP}(T|p, \xi)}{\partial T} = 0$  在  $(0, +\infty)$  上必存在唯一的零点  $T_0$ . 在  $T = T_0$  处对  $\text{ATP}(T|p, \xi)$  求其关于  $T$  的二阶导数, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \text{ATP}(T|p, \xi)}{\partial T^2} \Big|_{T=T_0} = & \frac{\alpha(p)[p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))]}{T_0} e^{(\beta + \theta - m(\xi))T_0} < 0. \end{aligned}$$

由上式可知, 不动点  $T_0$  为  $\text{ATP}(T|p, \xi)$  的全局极大值点. 又因为零售商的最大货架空间或存储空间为  $W$ , 所以需要保证  $I(t) \leq W$  恒成立, 即  $T \leq \bar{T}$ . 综上, 全局极大值点  $T_2$  满足式(11).  $\square$

**定理 3** 对于任意给定的  $p$  和  $\xi$ , 定义  $\Delta(p, \xi) = p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi))$ , 则有:

1) 如果  $\Delta(p, \xi) \geq 0$ , 则零售商最优的补货周期  $T$  满足式(9), 即  $T^* = T_1$ , 最优期末库存水平为

$$E^* = \left[ W + \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)} \right] e^{-(\beta + \theta - m(\xi))T_1} - \frac{\alpha(p)}{\beta + \theta - m(\xi)}; \quad (12)$$

2) 如果  $\Delta(p, \xi) < 0$ , 则零售商最优的补货周期  $T$  满足式(11), 即  $T^* = T_2$ , 最优期末库存水平为  $E^* = 0$ .

由引理2和引理3可知定理3显然成立.

由定理3可见, 当  $\Delta(p, \xi) \geq 0$ , 即持有额外库存有利时, 零售商将会充分利用货架空间来展示更多的商品, 进而利用库存水平影响需求的效应以获得更多的市场需求, 反之零售商没有动力去持有期末库存.

### 3.2 算法

基于定理1、定理2和定理3对模型目标函数相关性质的分析, 给出一个多阶段迭代算法以搜索该问题的最优解. 算法具体步骤如下.

step 1: 令  $i = 1$ , 初始化  $\xi^{(i)} = \xi_0 \geq 0$ .

step 2: 令  $j = 1$ , 初始化  $p^{(j)} = p_0 \geq c$ .

step 3: 计算  $\Delta(\xi^{(i)}, p^{(j)})$ , 根据定理3执行以下两个子步骤:

step 3.1: 如果  $\Delta(\xi^{(i)}, p^{(j)}) \geq 0$ , 则

$$T^{(j)} = T_1,$$

$$E^{(j)} =$$

$$\left[ W + \frac{\alpha(p^{(j)})}{\beta + \theta - m(\xi^{(j)})} \right] e^{-(\beta + \theta - m(\xi^{(j)}))T^{(j)}} - \frac{\alpha(p^{(j)})}{\beta + \theta - m(\xi^{(j)})}.$$

将  $T^{(j)}$ 、 $E^{(j)}$ 、 $\xi^{(i)}$  代入式(6), 求解以确定  $p^{(j+1)} = p^*$ . 同样地, 将  $T^{(j)}$ 、 $E^{(j)}$ 、 $p^{(j+1)}$  代入式(7), 求解以确定  $\xi^{(i+1)} = \xi^*$ .

step 3.2: 如果  $\Delta(\xi^{(i)}, p^{(j)}) < 0$ , 则  $T^{(j)} = T_2$ ,  $E^{(j)} = 0$ . 将  $T^{(j)}$ 、 $E^{(j)}$ 、 $\xi^{(i)}$  代入式(6), 求解以确定  $p^{(j+1)} = p^*$ . 同样地, 将  $T^{(j)}$ 、 $E^{(j)}$ 、 $p^{(j+1)}$  代入式(7), 求解以确定  $\xi^{(i+1)} = \xi^*$ .

step 4: 若  $p^{(j)}$  与  $p^{(j+1)}$  相差的足够小, 即  $|p^{(j+1)} - p^{(j)}| \leq 10^{-4}$ , 则最优解为  $(T^*, E^*, p^*) = (T^{(j)}, E^{(j)}, p^{(j+1)})$ , 执行 step 5, 否则令  $j = j + 1$ , 返回 step 3.

step 5: 若  $\xi^{(i)}$  与  $\xi^{(i+1)}$  相差的足够小, 即  $|\xi^{(i+1)} - \xi^{(i)}| \leq 10^{-4}$ , 则最优解为  $(T^*, E^*, p^*, \xi^*) = (T^{(j)}, E^{(j)}, p^{(j+1)}, \xi^{(i+1)})$ , 执行 step 6, 否则令  $i = i + 1$ , 返回 step 2.

step 6: 将最优策略  $(T^*, E^*, p^*, \xi^*)$  代入式(5)和(3), 分别计算零售商最优平均利润 ATP 和最优订购量  $q^*$ .

## 4 算例分析

本节通过具体的数值算例完成以下两部分工作: 1)应用所提出模型和算法求解变质品订购、定价和保鲜技术投资联合决策的最优策略, 以验证模型和算法的应用性和有效性; 2)对模型的主要参数进行灵敏度分析, 获得相应的管理启示. 现考虑如下库存系统:  $A = 150, \theta = 0.2, h = 3, \beta = 0.3, c = 20, W = 300, \alpha(p) = 1000 - 10p$ ; 零售商投入保鲜技术后可使产品变质率减少的部分为  $m(\xi) = \theta(1 - e^{-0.01\xi})$ . 此外, 本文算例参数的选取要求满足两个条件: 1)选取的参数满足模型构建的所有基本假设; 2)基于选取参数计算出来的最优解和最优平均利润是非负, 即保证问题是合理的、有意义的.

### 4.1 数值算例

首先选取两个初始搜索值  $\xi_0$  和  $p_0$ , 不失一般性, 令  $\xi_0, p_0$  满足  $m(\xi_0) = \theta/2, (p_0 - c)\alpha'(p_0) + \alpha(p_0) = 0$ , 代入相关参数经计算可得  $\xi_0 = 69.3147, p_0 = 60$ . 然后根据第3.2节所提多阶段迭代算法, 求解变质品订购、定价和保鲜技术投资联合决策问题的最优解. 表1给出了算法迭代的具体过程.

根据表1, 每步迭代均导致目标函数值 ATP 逐渐增加, 直至相邻两次迭代结果中决策变量间的差异  $|p^{(j+1)} - p^{(j)}|$  和  $|\xi^{(i+1)} - \xi^{(i)}|$  满足相应的阈值要求, 停止迭代计算, 即问题达到最大值. 由表1可知, 问题的最优策略为  $\xi^* = 219.6275, p^* = 62.9338, T^* = 0.2684, E^* = 179.8216, ATP = 17390.9667$ . 为了进一步验证算法的有效性, 对不同的初始值  $\xi_0$  与  $p_0$  进行相关实验, 选取  $\xi_0 = \{0, 30, 60, \dots, 300\}, p_0 = \{20, 25, 30, \dots, 90\}$ , 一共进行165次仿真实验. 实验结果表明: 不同的初始值进行迭代计算没有影响问题的近似解, 仅仅影响迭代计算的迭代次数.

图1~图3分别为平均利润函数 ATP 关于零售价格  $p$ 、保鲜技术投资水平  $\xi$  和补货周期  $T$  的函数图像. 显然, 平均利润函数 ATP 是关于  $p/\xi/T$  的严格凹函数, 验证了定理1、定理2以及引理1和引理2的正确性. 综上所述, 通过上述算法求解的结果便是问题的全局最优解.

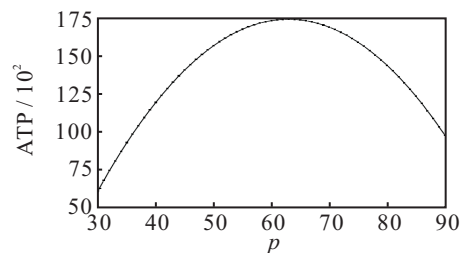


图1 ATP( $T(p), \xi(p), E(p), p$ ) 的图形

表1 算法迭代过程和计算结果

$i$	$j$	$\xi^{(i)}$	$p^{(j)}$	$E^{(j)}$	$T^{(j)}$	$p^{(j+1)}$	$\xi^{(i+1)}$	$ p^{(j+1)} - p^{(j)} $	$ \xi^{(i+1)} - \xi^{(i)} $	ATP <sup>(i)</sup>
	1		60.0000	153.60	0.298 7	62.709 6	210.266 4	2.709 6		
	2		62.709 6	165.01	0.290 1	62.871 6	214.726 5	0.162 0		
1	3	69.314 7	62.871 6	165.65	0.289 6	62.880 6	214.972 7	0.009 0	145.672 5	17 150.67
	4		62.880 6	165.68	0.289 6	62.881 1	214.986 4	0.000 5		
	5		62.881 1	165.68	0.289 6	62.881 1	214.987 2	0.000 0		
	1		60.000 0	169.73	0.273 9	62.788 5	215.698 8	2.788 2		
	2		62.788 5	179.19	0.268 9	62.926 5	219.391 7	0.138 0		
2	3	214.987 2	62.926 5	179.63	0.268 7	62.932 9	219.563 4	0.006 4	4.584 6	17 390.21
	4		62.932 9	179.65	0.268 7	62.933 2	219.571 4	0.000 3		
	5		62.933 2	179.65	0.268 7	62.933 3	219.571 8	0.000 0		
	1		60.000 0	169.92	0.273 6	62.789 4	215.763 0	2.789 4		
	2		62.789 4	179.36	0.268 7	62.927 0	219.447 6	0.137 6		
3	3	219.571 8	62.927 0	179.80	0.268 5	62.933 5	219.618 5	0.006 5	0.055 1	17 390.96
	4		62.933 5	179.82	0.268 4	62.933 8	219.626 5	0.000 3		
	5		62.933 8	179.82	0.268 4	62.933 8	219.626 9	0.000 0		
	1		60.000 0	169.92	0.273 6	62.789 4	215.763 8	2.789 4		
	2		62.789 4	179.36	0.268 6	62.927 0	219.448 3	0.137 6		
4	3	219.626 9	62.927 0	179.80	0.268 4	62.933 5	219.619 2	0.006 5	0.000 6	17 390.97
	4		62.933 5	179.82	0.268 4	62.933 8	219.627 1	0.000 3		
	5		62.933 8	179.82	0.268 4	62.933 8	219.627 5	0.000 0		
	1		60.000 0	169.92	0.273 6	62.789 4	215.763 8	2.789 4		
	2		62.789 4	179.36	0.268 6	62.927 0	219.448 3	0.137 6		
5	3	219.627 5	62.927 0	179.80	0.268 4	62.933 5	219.619 2	0.006 5	0.000 0	17 390.97
	4		62.933 5	179.82	0.268 4	62.933 8	219.627 1	0.000 3		
	5		62.933 8	179.82	0.268 4	62.933 8	219.627 5	0.000 0		

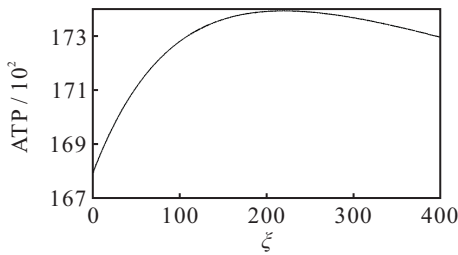


图2 ATP(p(ξ), T(ξ), E(ξ), ξ)的图形

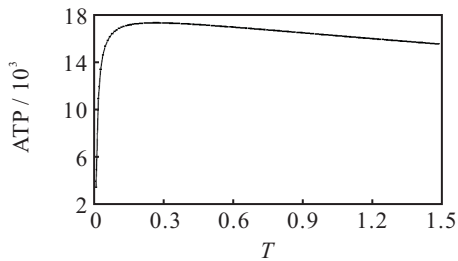


图3 ATP(p(T), ξ(T), E(T), T)的图形

4.2 灵敏度分析

下面对相关参数进行灵敏度分析. 保持其他参数取值不变, 每次仅改变某一个指定参数取值, 变化

幅度分别为增加(减小) 25%和增加(减少) 50%, 具体计算结果如表2所示.

由表2可得到如下结果:

1) 当固定订购成本  $A$  增加时,  $T^*$  和  $q^*$  将随之增加, 而  $p^*$ 、 $\xi^*$ 、 $E^*$  和  $ATP^*$  将随之减少. 固定订购成本的增加将导致零售商减低其订货频率(即延长订购周期的长度)并增加其订购量, 然而, 较长的订购周期将导致更多的变质损失量, 因此需要投入更多的保鲜投资以减少变质损失. 因为市场需求同时受价格和库存水平的影响, 较长的补货周期导致平均库存水平处于相对较低的水平, 所以零售商降低其商品的零售价格以刺激更多的商品需求. 此外, 零售商的货架空间或存储空间是有限的, 因此订货量的增加必定引致期末库存水平的减少.

2) 当参数  $\beta$  的取值逐渐增加时,  $ATP^*$ 、 $p^*$ 、 $\xi^*$  和  $E^*$  均随之增加, 而  $T^*$  和  $q^*$  均随之减小. 易知,  $\beta$  取值的大小反映了市场需求受到库存水平的影响程度,  $\beta$  取值越大表明库存水平对市场需求的影响越大. 因



表2 相关参数的灵敏度分析

参数	变化/%	$p^*$	$\xi^*$	$T^*$	$E^*$	$q^*$	ATP*
A	-50	63.4035	228.7906	0.1875	215.94	84.0644	17731.62
	-25	63.1496	223.9034	0.2311	196.45	103.5549	17546.78
	+25	62.5403	200.7840	0.3741	121.08	164.8172	17546.05
	+50	62.3382	195.2646	0.4139	103.19	181.9833	17125.01
$\beta$	-50	61.6816	197.5340	0.9295	0	387.2898	15993.17
	-25	61.6023	183.4800	0.5352	55.26	228.4287	16640.06
	+25	63.8818	221.9209	0.2257	196.35	103.6500	18184.05
	+50	64.8436	223.1548	0.1966	207.45	92.5491	19017.08
c	-50	57.9396	143.9495	0.2352	181.46	118.5430	21998.96
	-25	60.4378	188.8912	0.2509	180.88	119.1218	19628.21
	+25	65.1110	222.4818	0.4121	114.27	169.9491	15279.44
	+50	67.2252	222.9880	0.5891	56.32	224.2985	13293.33
h	-50	62.9521	220.9245	0.2488	188.34	111.6587	17753.60
	-25	62.9443	220.3267	0.2580	184.32	115.6783	17571.50
	+25	62.7009	203.8792	0.3565	129.30	156.8428	17208.91
	+50	62.6197	200.2036	0.3890	114.91	170.6469	17031.34
k	-50	62.9212	229.3408	0.2739	176.07	123.9263	17196.62
	-25	62.9298	254.2040	0.2702	178.61	121.3945	17318.23
	+25	62.9361	193.6497	0.2674	180.54	119.4635	17439.82
	+50	62.9376	173.5820	0.2668	181.01	118.9930	17475.13
W	-50	60.6548	117.7029	0.3007	22.42	127.5754	16056.59
	-25	61.8008	181.6582	0.2803	102.73	122.2744	16699.13
	+25	63.8911	236.0610	0.3132	216.05	141.6207	18116.31
	+50	65.0213	258.8714	0.2971	291.39	137.5527	18875.39

此,随着 $\beta$ 取值的增加,零售商会采取相应的措施将库存水平维持在较高水平,结果导致零售商一方面会加大保鲜技术投资水平,目的是减少产品的变质现象所造成库存的损失,另一方面会加快订货频率(缩短订货周期),即采用“多批少量”的订货模式,目的是保证平均库存水平不断增加,同时存储空间的约束导致订购量的不断减少.此外,保鲜技术投资水平的增加必定导致零售价格的增加,而补货周期的缩短和需求的增加会导致平均利润的增加.特别地,当减少50%时,最优期末库存水平 $E^* = 0$ .这是因为当 $ph - \beta - c(\beta + \theta - m(\xi)) < 0$ ,即零售商持有相应库存不利时,期末库存水平为0对零售商而言是最优的选择.

3) 当单位采购成本 $c$ 逐渐增加时, $p^*$ 、 $\xi^*$ 、 $T^*$ 和 $q^*$ 均随之增加,而ATP\*和 $E^*$ 随之减少.显然,单位采购成本的增加暗示该商品更“值钱”,零售商为避免产品的变质损失需要增加其保鲜技术投资并提高

其零售价格,同时零售商为弥补价格上涨导致的需求减少会增加其订购量来刺激需求.

4) 当单位库存持有成本 $h$ 增加时, $T^*$ 和 $q^*$ 会增加,而ATP\*、 $p^*$ 、和 $E^*$ 均随之减少.在需求同时依赖于库存水平和价格的情形下,随着库存持有成本的增加,零售商一方面通过降低价格来增大需求以减少库存的持有量,另一方面,虽然维持较高的库存水平将带来更多的需求,但同时也带来了更多的库存成本,因此零售商必须改变其订货策略即采用“少批多量”的订货模式,以保证其库存水平维持适当的水平.

5) 当参数 $k$ 增加时,ATP\*、 $p^*$ 和 $E^*$ 均随之增加,而 $\xi^*$ 、 $T^*$ 和 $q^*$ 均随之减少.参数 $k$ 取值越大保鲜技术成本投资回报率便越高,因此,当参数 $k$ 取值增加时,零售商将适当地减少其保鲜技术投资,但是仍能获得较好的保鲜效用.因为保鲜技术投资的效果变好,库存的变质损失将随之降低,且平均库存水平随之增加.这将导致零售商能够充分利用库存水平影响需

求的事实,进而采用“多批少量”的订货模式以保证其库存水平始终维持在较高的水平。

6) 当零售商的最大货架空间(或存储空间) $W$ 增加时,零售商将拥有更大的存储空间,持有更多的库存,因此零售商需要增加保鲜投入以抑制产品的变质并提高零售价格。另外, $W$ 的增加必定导致 $E^*$ 的增加,以实现零售商不断提高其平均库存水平的目标。此外易知,最优补货周期 $T^*$ 同时依赖于 $E^*$ 和 $W$ ,且表现为随 $E$ 的增加而减小,随 $W$ 的增加而增加。因此,随着 $W$ 的增加, $T^*$ 并不具有特定单调关系,进而 $q^*$ 也不具有特定单调关系。

## 5 结论

本文针对一个产品需求同时受到库存水平和价格影响且产品的变质率可通过投资保鲜技术得到降低的变质品库存系统,同时假定该系统不允许缺货并放松其库存水平为零的约束,以平均利润最大化为目标,研究零售商在有限存储空间约束下变质品订购、定价和保鲜技术投资的联合决策问题。针对该联合决策模型的特征,证明了模型最优解的存在性和唯一性,并给出了零售商持有期末库存的条件;同时根据最优解的相关性质,设计了一个求解模型的多阶段迭代算法。

研究发现:当持有单位额外库存获得的收益大于相应的支出成本(即 $p\beta - h - c(\beta + \theta - m(\xi)) \geq 0$ )时,零售商持有期末库存将获得更大的利润,即零售商应该将初始库存建立到最大允许水平,反之零售商不需要建立期末库存水平;当固定订购成本较大时,零售商需要增加订购量以减低其订货频率,同时需要加大保鲜技术投入水平来减少产品的变质损失,并降低产品的零售价格以增加需求;当库存水平对需求率有较大影响时,零售商可以充分利用库存水平影响需求的效应,即零售商应该采用“多批少量”的订货模式;当单位采购成本较高时,零售商需要加大保鲜技术投资水平并提高零售价格,同时为了弥补价格上涨所导致的需求减少,零售商需要增加其订购量以维持其较高的库存水平来增加市场需求;当单位库存持有成本较高时,零售商需要在“获得更多需求”与“支付更多的库存成本”之间找到一个平衡,选择“少批多量”的订货模式并降低其零售价格,保证其平均库存维持在适当水平,这对零售商是最优的策略;当保鲜技术投资的回报率较高时,零售商不要投入太多的保鲜技术投资,同时采用“多批少量”的订货模式,目的是库存维持在较高水平,以便充分利用库存水平影响需求现象;当零售商可利用的货架空间较大时,零

售商可以持有更多的库存,同时需要增加保鲜投入以抑制产品的变质并提高零售价格。

总之,本文可为零售商解决库存水平影响需求下变质品的订购、定价和保鲜技术投资联合决策问题提供一定的指导意义和参考价值。

## 参考文献(References)

- [1] Levin R I. Production operations management: Contemporary policy for managing operating systems[M]. New York: McGraw-Hill Companies, 1972: 373.
- [2] Peterson R, Silver E A. Decision systems for inventory management and production planning[M]. New York: Wiley, 1985: 799.
- [3] Gupta R, Vrat P. Inventory model for stock-dependent consumption rate[J]. Operational Research, 1986, 23(1): 19-24.
- [4] Baker R C, Urban T L. A deterministic inventory system with an inventory-level-dependent demand rate[J]. Journal of the Operational Research Society, 1988, 39(9): 823-831.
- [5] Urban T L. Inventory models with inventory-level-dependent demand: A comprehensive review and unifying theory[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 162(3): 792-804.
- [6] Mandal B N, Phaujdar S. An inventory model for deteriorating items and stock-dependent consumption rate[J]. Journal of the Operational Research Society, 1989, 40(5): 483-488.
- [7] Dye C Y, Ouyang L Y. An EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 163(3): 776-783.
- [8] Chang C T, Teng J T. On “An EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging” by Dye and Ouyang[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 174(2): 923-929.
- [9] Wu K S, Ouyang L Y, Yang C T. An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging[J]. International Journal of Production Economics, 2006, 101(2): 369-384.
- [10] Soni H N. Optimal replenishment policies for non-instantaneous deteriorating items with price and stock sensitive demand under permissible delay in payment[J]. International Journal of Production Economics, 2013, 146(1): 259-268.
- [11] Pando V, San-Jos L A, Garca-Laguna J, et al. Optimal lot-size policy for deteriorating items with stock-dependent demand considering profit maximization[J]. Computers and Industrial Engineering, 2018, 117: 81-93.
- [12] Tiwari S, Jaggi C K, Bhunia A K, et al. Two-warehouse

- inventory model for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and inflation using particle swarm optimization[J]. *Annals of Operations Research*, 2017, 254(1/2): 401-423.
- [13] Shaikh A A, Khan M A A, Panda G C, et al. Price discount facility in an EOQ model for deteriorating items with stockdependent demand and partial backlogging[J]. *International Transactions in Operational Research*, 2019, 26: 1365-1395.
- [14] Hou K L, Lin L C. An EOQ model for deteriorating items with price-and stock-dependent selling rates under inflation and time value of money[J]. *International Journal of Systems Science*, 2006, 37(15): 1131-1139.
- [15] 霍佳震, 李贵萍, 段永瑞. 部分延迟订购的易变质品联合定价与生产策略[J]. *运筹与管理*, 2015, 24(1): 255-262.  
(Huo J Z, Li G P, Duan Y R. Joint pricing and production policy for deterioration items with partial backlogging[J]. *Operations Research and Management Science*, 2015, 24(1): 255-262.)
- [16] 计国君, 韩尚清. 基于第三方的易变质产品库存决策[J]. *控制与决策*, 2015, 30(4): 663-669.  
(Ji G J, Han S Q. Deteriorating item inventory decision-making research based on thirdparty[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(4): 663-669.)
- [17] Lu L, Zhang J, Tang W. Optimal dynamic pricing and replenishment policy for perishable items with inventory-level-dependent demand[J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(6): 1480-1494.
- [18] 曹裕, 李业梅, 李青松. 基于提前支付的非瞬时变质产品批量订货定价策略[J]. *控制与决策*, 2018, 33(2): 301-308.  
(Cao Y, Li Y M, Li Q S. Research on pricing and inventory lot-size policies for non-instantaneous deteriorating items with stochastic demand and promotional efforts based on advance payments[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(2): 301-308.)
- [19] Feng L, Chan Y L. Pricing and lot-sizing policies for perishable goods when the demand depends on selling price, displayed stocks, and expiration date[J]. *International Journal of Production Economics*, 2017, 185: 11-20.
- [20] Chen L, Chen X, Keblis M F, et al. Optimal pricing and replenishment policy for deteriorating inventory under stock-level-dependent, time-varying and price-dependent demand[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2019, 135: 1294-1299.
- [21] Agi M A N, Soni H N. Joint pricing and inventory decisions for perishable products with age-, stock-, and price-dependent demand rate[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2020, 71(1): 85-99.
- [22] Hsieh T P, Dye C Y. Optimal dynamic pricing for deteriorating items with reference price effects when inventories stimulate demand[J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 262(1): 136-150.
- [23] 李贵萍, 杜碧升, 段永瑞. 考虑参照价格效应的易逝品定价与订购策略[J]. *控制与决策*, 2019, 34(9): 1964-1972.  
(Li G P, Du B S, Duan Y R. Pricing and ordering strategy for deteriorating items with reference price effect[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(9): 1964-1972.)
- [24] Li R, Teng J T. Pricing and lot-sizing decisions for perishable goods when demand depends on selling price, reference price, product freshness, and displayed stocks[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 270(3): 1099-1108.
- [25] Richards R. The 2011 retail profit protection report technical report[R]. Man chester: Richards International Group, 2011.
- [26] Lee Y P, Dye C Y. An inventory model for deteriorating items under stock-dependent demand and controllable deterioration rate[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 63(2): 474-482.
- [27] Mishra U, Cárdenas-Barrón, Leopoldo Eduardo, et al. An inventory model under price and stock dependent demand for controllable deterioration rate with shortages and preservation technology investment[J]. *Annals of Operations Research*, 2017, 254(1/2): 165-190.
- [28] Bardhan S, Pal H, Giri B C. Optimal replenishment policy and preservation technology investment for a non-instantaneous deteriorating item with stock-dependent demand[J]. *Operational Research*, 2019: 19(2): 347-368.

### 作者简介

江文辉(1992—), 男, 博士生, 从事库存与供应链管理的研究, E-mail: jiangwh123456@163.com;

丁小东(1987—), 男, 博士, 从事交通运输经济、物流系统规划等研究, E-mail: dxddyx@163.com;

李延来(1971—), 男, 教授, 博士生导师, 从事库存与供应链管理、决策理论与方法等研究, E-mail: lyl\_2001@163.com;

徐菱(1965—), 女, 教授, 博士生导师, 从事物流与供应链管理研究, E-mail: xl\_xnjd@163.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)