

控制与决策

Control and Decision

模糊图上合作对策的平均树解

单而芳, 林硕颖, 史纪磊

引用本文:

单而芳, 林硕颖, 史纪磊. 模糊图上合作对策的平均树解[J]. *控制与决策*, 2020, 35(10): 2521–2527.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0216>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

直觉模糊集的Choquet积分相关测度及其决策应用

Choquet integral correlation measures of intuitionistic fuzzy sets and its application in decision making

控制与决策. 2019, 34(9): 1937–1945 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0102>

联盟值为梯形模糊数的合作对策最小平方求解模型与方法

The least square solution model and method of cooperative games with trapezoidal fuzzy numbers

控制与决策. 2019, 34(4): 834–842 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1301>

模糊联盟图合作对策 τ 值

τ -values for fuzzy graph cooperative games

控制与决策. 2017, 32(9): 1653–1658 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1495>

直觉模糊数密度集成算子及其应用

Intuitionistic fuzzy number density aggregation operator and its application

控制与决策. 2017, 32(6): 1026–1032 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0681>

具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策A-T解

A-T solution of graph cooperative games with interval fuzzy coalitions and risk preference

控制与决策. 2017, 32(2): 299–304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1618>

模糊图上合作对策的平均树解

单而芳^{1†}, 林硕颖¹, 史纪磊^{1,2}

(1. 上海大学 管理学院, 上海 200444; 2. 宁波财经学院 基础学院, 浙江 宁波 315000)

摘要: 针对模糊图上的平均树解进行研究. 在无向模糊图中, 参与者本身与参与者之间有不同的参与水平, 利用 Choquet 积分函数对模糊图进行划分, 定义模糊平均树解, 并证明它是满足模糊分支有效性和 cg 分支公平性的唯一解, 以及满足模糊分支有效性和模糊分支公平性的唯一解. 此外, 当无圈模糊图合作对策满足超可加性时, 证明模糊平均树解是核中的元素, 即该解是稳定的. 利用 Choquet 积分函数和深度搜索算法 (DFS) 将无圈图上的模糊平均树解推广到任意图上, 拓展了任意图上模糊平均树解的表达形式. 最后, 通过一个供应链算例计算并分析模糊图上合作对策的平均树解.

关键词: 模糊图; 平均树解; 唯一解; Choquet 积分函数; 模糊图对策; 深度搜索算法

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0216

引用格式: 单而芳, 林硕颖, 史纪磊. 模糊图上合作对策的平均树解[J]. 控制与决策, 2020, 35(10): 2521-2527.

Average tree solution of cooperative games with the fuzzy communication structure

SHAN Er-fang^{1†}, LIN Shuo-ying¹, SHI Ji-lei^{1,2}

(1. School of Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China; 2. College of Basic Science, Ningbo University of Finance and Economics, Ningbo 315000, China)

Abstract: This paper studies the average tree solution with fuzzy communication structure. In fuzzy graphs, the membership of the players and the relations among them are leveled. This paper introduces Choquet by graphs version on fuzzy communication structure, whereby the fuzzy average tree solution is defined, which is a new solution that considers the bilateral communications as players. On the class of cycle-free fuzzy graph games, the fuzzy average tree solution is the unique solution that satisfies fuzzy component efficiency and cg component fairness as well as the unique solution that satisfies fuzzy component efficiency and fuzzy component fairness. Especially, it is proved that average tree solution is an element of the core for superadditive games which illustrates stability. We extend and generalize the average tree solution using the classical DFS algorithm from games with cycle-free communication structure to the class of all games with communication structure, and finally calculate the fuzzy average tree solution in a supply chain example.

Keywords: fuzzy graphs; average tree solution; unique solution; Choquet by graphs version; fuzzy graph games; DFS

0 引言

可转移支付效用的合作对策假设任意的参与者都能形成合作联盟, 并且能获得相应的收益. 应用最广泛的分配规则是 Shapley 值, 由 Shapley^[1] 于 1953 年提出. 然而, 在实际应用中, 由于受到多种因素影响, 有些联盟是无法形成的. 基于此, Myerson^[2] 提出了以图作为限制结构的合作对策, 简称图对策, 假定只有通过线或者路相互连通的参与者之间才能构成可行联盟, 并由此提出了图限制对策, 把图限制对策的 Shapley 值作为新的分配规则, 也即著名的 Myerson

值^[2]. Herings 等^[3] 提出了平均树解, 并用分支有效性和分支公平性对其进行了唯一性刻画. Herings 等^[4] 基于深度搜索算法搜索出所有生成树, 将平均树解推广到任意图上. Baron 等^[5] 运用深度优先探索算法 (DFS) 和宽度优先搜索算法 (BFS), 对任意图下的平均树解的海萨尼红利分配进行了研究. Van den Brink 等^[6] 提出了准许树, 即只有通过准许, 参与者之间才能合作, 并给出了两种公理化方法.

然而, 图对策中参与者之间以及参与者本身具有不同的参与水平. 同时, 联盟的收益也可能不是

收稿日期: 2019-02-27; 修回日期: 2019-09-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11571222).

责任编辑: 刘民.

[†]通讯作者. E-mail: efshan@i.shu.edu.cn.

一个确定值. Aubin^[7]认为模糊联盟中的成员存在不确定性,为了计算模糊联盟中参与者的收益,需要根据模糊集的水平进行划分. Tsurumi等^[8]提出利用Choquet积分函数对模糊图进行划分. Jiménez-Losada等^[9]提出用模糊图来分析参与者之间的合作.在此基础上,Jiménez-Losada等^[10]基于比例和Choquet积分函数对模糊图进行划分,推广了模糊Myerson值. Jiménez-Losada^[11]系统介绍了模糊联盟、模糊双边关系、模糊合作对策,并介绍了几种模糊模型.在此基础上, Fernández等^[12]提出了用Choquet积分函数刻画模糊图上的Position值,定义了新的解cg-Position值. Nie等^[13]推广了在模糊信息下的平均树解,并分析比较了该模糊平均树解与模糊Shapley值、模糊联盟核心之间的关系.在此基础上, Nie等^[14]利用Choquet积分函数,对具有模糊联盟的平均树解进行推广,并证明当图为完全图时,该解等价于模糊Shapley值. Yang等^[15]提出了基于风险偏好均值的模糊联盟图对策及其平均树解,在图对策的基础上考虑具有区间模糊联盟的情况. Su等^[16]基于图对策,引入λ截集置信水平,提出了具有区间型特征的支付函数的模糊平均树解,并进行唯一性刻画.以上研究的模糊信息下的平均树解只考虑了参与者具有模糊参与水平的情况,本文在此基础上进一步考虑参与者之间模糊合作水平.

本文研究无向图上的平均树解,基于Jiménez-Losada^[11]和 Fernández等^[12]利用划分函数对模糊图进行划分,本文采用Choquet积分函数对模糊图进行划分,拓展了模糊平均树解的表达形式.然后,对其进行唯一性刻画,并证明解的稳定性.基于Herings等^[4]的研究,将模糊平均树解推广到任意图上,并给出该模糊平均树解的表达式.

1 预备知识

1.1 TU对策和图对策

具有特征函数形式的合作对策通常被称为可转移支付对策(TU对策). TU对策可以用二元组 (N, v) 表示.其中: $N = \{1, 2, \dots, n\}$,表示参与者的集合; S 是 N 的子集,表示 S 中的参与者形成的联盟; v 表示特征函数,它是从 $S: S \subseteq N$ 到实数集 \mathbf{R} 的一个映射,即 $v: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$,且 $v(\emptyset) = 0$.对于给定参与者数目为 n 的集合,记所有TU对策的集合为 G^N .

用 $r = (N, L)$ 表示图结构, L 表示边的集合, $L \subset \{\{i, j\} \in N \times N : i \neq j\}$,通常用 r 代替 $r = (N, L)$ 表示一个图,用 ij 代替 $\{i, j\}$ 表示一条边,记所有图的集合为 R^N .图对策 (N, v, L) 是由可转移支付对策 (N, v) 和图 r 构成的.因此,把图对策记为 $(v, r) \in G^N \times R^N$.在图 r 上只有连通的点才能形成联盟,用

$C^r(N)$ 表示图 r 上所有连通子集的集合,用 $\hat{C}^r(N)$ 表示所有分支的集合.图对策的核心可以定义为 $C(v, r) = \{x \in \mathbf{R}^N \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), S \in C^r(N)\}$.

1.2 模糊图

根据Jiménez-Losada等^[10]提出的基于无向图的非概率模糊图概念,参与者之间有着模糊的双边关系.用 \wedge 表示最小值,用 \vee 表示最大值. τ 表示 N 上的模糊集, $\tau: N \rightarrow [0, 1]$.用 $[0, 1]^N$ 表示模糊集的集合.当 $\tau \in [0, 1]^N, \rho \in [0, 1]^{N \times N}$ 表示模糊集 τ 上的一个模糊双边关系,即对于任意参与者 $i, j \in N, \tau(i)$ 和 $\tau(j)$ 分别表示参与者 i 和 j 的参与水平, $\rho(ij)$ 表示参与者 i 与 j 之间的合作水平, $\rho(ij) \leq \tau(i) \wedge \tau(j)$. τ 上的模糊双边关系 ρ 具有对称性,即对于任意 $i \neq j$,有 $\rho(ij) = \rho(ji)$; ρ 具有自反性,即对于任意 $i \in N, \rho(ii) = \tau(i)$.用 $\rho \in [0, 1]_0^{N \times N}$ 表示所有满足对称性和自反性的模糊双边关系的集合.

(N, τ, ρ) 表示无向模糊图,本文只考虑 ρ 具有自反性的模糊图,记所有具有对称性和自反性的模糊图的集合为 F^N .

模糊图对策 (N, v, ρ) 是由可转移支付对策 (N, v) 和模糊图 (N, τ, ρ) 构成的,把模糊图对策记为 $(v, \rho) \in G^N \times F^N$.通常,用 ρ 代替 (N, τ, ρ) 来表示一个模糊图,用 $L(\rho)$ 表示 ρ 上所有边的集合.对于任意边 $ij \in L(\rho), t \in [0, \rho(ij)]$, ρ_{-ij}^t 表示边 ij 的合作水平减少 t 后形成的新模糊图,满足 $\rho_{-ij}^t(ij) = \rho(ij) - t, \rho_{-ij}^t \in F^N$.当 $S \in N$ 时, $\rho_S \in [0, 1]_0^{N \times N}$ 表示由联盟 S 导出的模糊子图满足 $\rho_S(ij) = \rho(ij) (i, j \in S)$,否则 $\rho_S(ij) = 0$.模糊图 ρ 上联盟 S 的收益为 $v^\rho(S), v^\rho(S) = v(\rho_S)$.用 N/ρ 表示模糊图上所有分支的集合.

Aubin在文献[7]中对模糊图进行划分,得到有限的序列 $\{(r_k, s_k)\}_{k=1}^m$.其中: k 表示对模糊图进行的第 k 次划分; s_k 表示第 k 次划分选取的模糊度, $s_k \in (0, 1]$; r_k 表示根据 s_k 划分后得到的图,其满足:

- 1) $r_k \in R^N, s_k > 0$,其中 $k = 1, 2, \dots, m$;
- 2) $s_1 k_1 \leq \rho$ 且当 $k = 2, \dots, m$ 时

$$s_k r_k \leq \rho - \sum_{p=1}^{k-1} s_p r_p;$$

- 3) $\rho = \sum_{k=1}^m s_k r_k$.

下面记Choquet划分函数为cg,其划分的原则是在每次划分时选取图中最小的模糊度 s_k 以得到最大的连通图,其划分过程可以视为一个循环语句^[11].令

$k = 0, \text{cg} = \phi$ 且 $\rho := \rho$, 当 $\rho \neq 0$ 时, 循环

$$\begin{cases} k = k + 1, \\ s_k = \bigwedge \rho, \\ r_k = r^\rho, \\ \text{cg} = \text{cg} \cup \{(r_k, s_k)\}, \\ \rho = \rho - s_k r_k, \\ \text{cg}(\rho) = \text{cg}. \end{cases}$$

在 ρ 上, 用 $\text{im}(\rho)$ 表示模糊图中模糊度的非减排列顺序, 即 $\text{im}(\rho) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m\}$. 当 $k = 1$ 时, 对模糊图进行第 1 次划分, 取 $s_1 = \lambda_1$, 得到 $r_1 = r^\rho = [\rho]_1$. 即模糊子图 ρ_1 对应于普通图 r_1 , 表示为 $[\rho]_1$. 在下一个循环里, $s_2 = \lambda_2 - \lambda_1, r_2 = r^\rho = [\rho]_2, \rho_2$ 是由 ρ_1 的模糊度都减去 s_1 得到的模糊子图, r_2 是模糊子图 ρ_2 对应的普通图. 以此类推, 直到得到所有的模糊子图.

1.3 平均树解 AT 值

定义 1 令 $v \in G^N$, 在 N 上定义图对策的效用值为函数 $\psi : G^N \times R^N \rightarrow R$, 表示为

$$\psi(v, r) = \sum_{B \in \hat{C}^r(N)} v(B).$$

Herings 等^[3] 提出了无圈图上的平均树解. 对于有向树图 (N, D) , D 表示有向边的集合, $D \subset \{(i, j) \in N \times N : i \neq j\}$. i 是 j 的前任, j 是 i 的后继者, 则 $(i, j) \in D$. 在有向图 (N, D) 上, 点 j 是点 i 的下级, D 中包含一条从点 i 到点 j 的有向路. 用符号 $T(i)$ 表示以点 i 作为根点的有向树图, $S_{T(i)}(i)$ 表示点 i 所有下级的集合, $S_{T(i)}^c(i) = S_{T(i)}(i) \cup \{i\}$.

对于任意 $r, B \in \hat{C}^r(N)$, 定义 $L_{T(i)}(j) = \{h \in B | (j, h) \in T(i)\}$, 表示点 j 的所有后继者的集合. 显然, $L_{T(i)}(j) \subseteq S_{T(i)}(j)$. 在树图 $T(i)$ 上, 分配给点 j 的收益为

$$t_j^i(v, r) = v(S_{T(i)}^c(j)) - \sum_{h \in L_{T(i)}(j)} v(S_{T(i)}^c(h)).$$

树图中任意点 j 的效用值为

$$\text{AT}_j(v, r) = \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} t_j^i(v, r).$$

Herings 等^[4] 将无圈图上的平均树解推广到任意图上. 对于任意图 r , 定义了 n 元组 $C = (C_1, \dots, C_n)$, 表示在 N 上的 n 个子集. 任一可行 n 元组 C 可以视为一个有向树, 其满足: 对于任意点 $i, B \in \hat{C}^r(C_i \setminus i)$; 对于某些点 $j \in N$, 有 $B = C_j, ij \in L$. 对于任意点 i, j , 当 $i \neq j$ 时, 满足以下两个性质中的其中一个:

- 1) $C_i \in C_j \setminus j$ 或 $C_j \in C_i \setminus i$;

- 2) $C_i \cap C_j = \emptyset$ 且 $C_i \cup C_j \notin C^r(N)$.

在任意图 r 上, 用 C^L 表示所有可行 n 元组的集合, 即存在 $|C^L|$ 个生成树. 对于任意 $C \in C^L$, 任意参与者 $i \in N$, 定义分配给 i 的分配向量为 $m^C(v, r) \in R^N$, 有

$$m_i^C(v, r) = v(C^i) - \sum_{B \in \hat{C}^r(C_i \setminus i)} v(B).$$

因为 $|C^L|$ 个生成树, 所以任意图上的平均树解定义为

$$\text{AT}^C(v, r) = \frac{\sum_{C \in C^L} m^C(v, r)}{|C^L|}. \quad (1)$$

2 模糊平均树解

定义 2 在 N 上定义模糊图对策的效用值为函数 $\gamma : G^N \times F^N \rightarrow R$, 满足:

- 1) 当 $r \in R^N$ 时, $\gamma(v, r) = \psi(v, r)$;
- 2) $\gamma(v, \rho) = \sum_{B \in N/\rho} = \gamma(v, \rho_B)$.

定义 3 对任意模糊图对策 (v, ρ) 进行 cg 划分, 得到有限的序列 $\{(r_k, s_k)\}_{k=1}^m$.

本文定义任意子图 r_k 都是连通的, 将有合作水平的边称为实边, 在图中用实线表示. 例如, 当边 ij 是实线连接时, 称边 ij 是强连接的; 将合作水平为零的边称为虚边, 在图中用虚线表示. 例如, 当边 ij 是虚线连接时, 称边 ij 是弱连接的.

同理, 将有参与水平的点称为实点, 在图中用实心点表示; 将参与水平为零的点称为虚点, 在图中用空心点表示, 虚点的支付为零.

定义 4 设 (v, ρ) 为任意模糊图对策, 对模糊图 ρ 进行 cg 划分, 得到有限序列 $\{(r_k, s_k)\}_{k=1}^m$, 模糊图对策的效用值定义为

$$\gamma(v, \rho) = \sum_{k=1}^m s_k \psi(v, r_k).$$

用 v_{r_k} 表示划分后得到的子图 r_k 的效用值, 则模糊图对策的效用值也可以表示为

$$v^\rho = \sum_{k=1}^m s_k v_{r_k}.$$

定义 5 在任意连通模糊图 ρ_B 上, 由 cg 划分得到子图 r_k, B_{r_k} 表示 r_k 上所有实点和虚点的集合. 当断掉 r_k 上的一条边 ab 时, 得到分别包含点 a, b 的分支 $B_{r_k}^a$ 和 $B_{r_k}^b, ab$ 可以是实边或虚边. 令 N/r_k 表示子图 r_k 断边后得到的所有分支的集合, 即 $B_{r_k}^a \in N/r_k, B_{r_k}^b \in N/r_k$.

在模糊图 ρ_B 上, 由 cg 划分得到子图 r_k , 用 $\hat{C}^{r_k}(B_{r_k})$ 表示所有由实线连通的实点的联盟以及孤立实点的集合. 任意联盟 B_{r_k} 的效用可定义为

$$v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) = \sum_{B'_{r_k} \in \hat{C}^{r_k}(B_{r_k})} v(B'_{r_k}),$$

即 $v_{r_k} = v^{L_{r_k}}(B_{r_k})$. B'_{r_k} 表示只由实边连通的实点的联盟或者孤立实点.

定义6 (模糊平均树解 $\gamma_j^{cg}(v, \rho)$) 对于任意模糊图对策 (v, ρ) , 当对模糊图 ρ 进行cg划分时得到有限序列 $\{(r_k, s_k)\}_{k=1}^m$, 对于任意 $i \in N$, 对应 (v, ρ) 的一个支付向量 $\gamma^{cg}(v, \rho)$ 为

$$\gamma_j^{cg}(v, \rho) = \sum_{k=1}^m s_k AT_j(v, r_k). \quad (2)$$

当 $i, j \in B_{r_k}$ 时 (B_{r_k} 表示图 r_k 上参与者的集合), 式(2)也可以拓展为

$$\gamma_j^{cg}(v, \rho) = \sum_{k=1}^m s_k \sum_{i, j \in B_{r_k}} \frac{t_j^i(v, r_k)}{|B|}.$$

从定义6可以看出, 该解是基于模糊图 ρ 、cg积分函数和限制到图 r_k 上的平均树解, 对模糊树图进行cg划分后得到多个子图, 但这并不破坏子图的连通的结构. 在任意划分后得到的子图 r_k 中, 每个成员都会影响子图的收益分配.

定义7 (模糊分支有效性) 对于任意 $B \in N/\rho$, 有

$$\sum_{j \in B} \gamma_j^{cg}(v, \rho) = v^\rho(B).$$

定义8 (cg分支公平性) 在模糊图 ρ_B 上, 对于任意边 $ab \in L(\rho)$, 当断掉边 ab 后形成两个分别包含点 a, b 的分支 B^a 和 B^b , 有

$$\frac{\sum_{j \in B^a} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}))}{|B^a|} = \frac{\sum_{j \in B^b} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}))}{|B^b|}.$$

定义9 (模糊分支公平性) 在模糊图 ρ_B 上, 对于任意边 $ab \in L(\rho)$, 将联盟 B 分为两部分, 假设断掉边 ab , 形成两个分别包含点 a, b 的分支 B^a 和 B^b . 对于 $t \in (0, \rho(ab)]$, 当边 ab 的合作水平减少 t 时, 对分支 B^a 和 B^b 中每个参与者的平均支付影响相同, 有

$$\frac{\sum_{j \in B^a} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}^t))}{|B^a|} = \frac{\sum_{j \in B^b} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}^t))}{|B^b|}.$$

下面举例说明. 对于任意模糊图对策 (v, ρ) , 设 $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 其模糊图如图1所示.

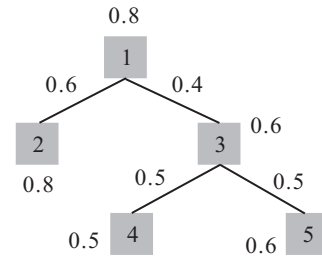


图1 模糊图 ρ

图2表示该树图被cg划分后得到4个子图, $s_1 = 0.4$; 将模糊图中所有的模糊度都减去 s_1 , 得到第2个模糊图, 再次选取模糊图中最小的模糊度, 即 $s_2 = 0.1$. 以此类推, 直到划分结束.

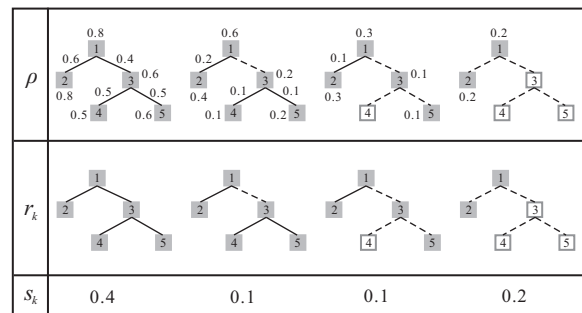


图2 cg划分模糊图

3 模糊平均树解的刻画

本节给出模糊图上对策的平均树解的公理化刻画. 该模糊平均树解满足3个基本性质: 模糊分支有效性、cg分支公平性、模糊分支公平性.

引理1 对于任意模糊图对策 (v, ρ) , 模糊平均树解 $\gamma_j^{cg}(v, \rho)$ 满足模糊分支有效性和cg分支公平性.

证明 1) 对于任意无圈模糊图对策 (v, ρ) , 在模糊图 ρ_B 上, 对于任意 $i, j \in B$, 满足

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B} \gamma_j^{cg}(v, \rho) &= \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^m s_k AT_j(v, r_k) = \\ &= \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^m s_k \sum_{i \in B_{r_k}} \frac{t_j^i(v, r_k)}{|B|} = \\ &= \sum_{k=1}^m s_k \sum_{i \in B_{r_k}} \sum_{j \in B_{r_k}} \frac{t_j^i(v, r_k)}{|B|} = \\ &= \sum_{k=1}^m s_k \sum_{i \in B_{r_k}} \frac{v_{r_k}}{|B|} = \\ &= \sum_{k=1}^m s_k v_{r_k} = v^\rho(B). \end{aligned} \quad (3)$$

因此, 该模糊平均树解满足模糊分支有效性.

2) 下面证明模糊平均树解 $AT_j^{cg}(v, \rho)$ 满足cg分支公平性. 对于任意 $B \in N/\rho$, 在树图 $r(B)$ 中去掉一条边 ab , 得到分别包含 a 和 b 的两个分支 B^a 和 B^b . 对

于任意 $h \in B$: 当 $h \in B^a$ 时, $\sum_{j \in B^b} t_j^h(v, r) = v(B^b)$; 当 $h \in B^b$ 时, $\sum_{j \in B^b} t_j^h(v, r) = v(B) - v(B^a)$. 由模糊图 ρ 划分后得到有限的序列 $\{(r_k, s_k)\}_{k=1}^m$, 当图 r_k 中断掉边 ab 时, 形成分别包含点 a, b 的分支 $B_{r_k}^a$ 和 $B_{r_k}^b$. 而且对于任意 $k, |B_{r_k}^a|$ 和 $|B_{r_k}^b|$ 的值不变, $|B_{r_k}| = |B|$.

当 $h \in B_{r_k}^a$ 时, $\sum_{j \in B_{r_k}^b} t_j^h(v, r) = v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b)$; 当 $h \in B_{r_k}^b$ 时, $\sum_{j \in B_{r_k}^b} t_j^h(v, r) = v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a)$.

因此, 可证下式:

$$\sum_{j \in B_{r_k}^b} AT_j(v, r_k) = \frac{|B_{r_k}^a| v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b) + |B_{r_k}^b| (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a))}{|B_{r_k}|}.$$

同时, 因为

$$\sum_{j \in B_{r_k}^a} AT_j(v, r_{-ab}) = v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a),$$

可证下式:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B_{r_k}^b} (AT_j(v, r) - AT_j(v, r_{-ab})) &= \frac{|B_{r_k}^a| v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b) + |B_{r_k}^b| (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a))}{|B_{r_k}|} - \\ &v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a) = \frac{|B_{r_k}^b|}{|B_{r_k}|} (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b)) = \\ &\frac{|B_{r_k}^b|}{|B|} (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b)). \end{aligned} \quad (4)$$

由式(4)可得

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B^b} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab})) &= \sum_{k=1}^m s_k \sum_{j \in B_{r_k}^b} (AT_j(v, r) - AT_j(v, r_{-ab})) = \\ &\frac{|B^b|}{|B|} \sum_{k=1}^m s_k (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b)). \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j \in B^a} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}))}{|B^a|} &= \frac{\sum_{j \in B^b} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}))}{|B^b|}. \end{aligned} \quad (5)$$

引理得证. \square

引理 2 对于任意模糊图对策 (v, ρ) , 模糊平均树解 $\gamma_j^{cg}(v, \rho)$ 满足模糊分支公平性.

引理 2 表明, 当 ρ 上的任意边 ij 的合作水平减少

t 时, 形成新的模糊图 ρ_{-ij}^t . 由于减少了一条边的合作水平, 每个参与者的平均支付变化均相等.

证明 当边 ab 的合作水平减少 t 时, 假设实边 ab 只存在于子图 $(r_k)_{k=i}^j$ 中, $(r_k)_{k=i}^j \subseteq (r_k)_{k=1}^m, \rho_{(ab)} = \sum_{k=i}^j s_k$. 在任一子图 $r_k \in (r_k)_{k=i}^j$ 上, 当断掉边 ab 时, 形成分别包含点 a, b 的分支 $B_{r_k}^a$ 和 $B_{r_k}^b$. 当边 ab 的合作水平减少 $\rho_{(ab)}$ (即 $t = \rho_{(ab)}$) 时, $(r_k)_{k=i}^j$ 上的实边 ab 变成虚边 ab , 于是, 对于任一子图 $r_k \in (r_k)_{k=i}^j$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B_{r_k}^a} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}^t)) &= \frac{|B_{r_k}^a| (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b))}{|B_{r_k}^a| + |B_{r_k}^b|} = \\ &\frac{|B^a| (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b))}{|B_{r_k}|}. \end{aligned}$$

同理, 可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B_{r_k}^b} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}^t)) &= \frac{|B_{r_k}^b| (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b))}{|B_{r_k}^a| + |B_{r_k}^b|} = \\ &\frac{|B^b| (v^{L_{r_k}}(B_{r_k}) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^a) - v^{L_{r_k}}(B_{r_k}^b))}{|B_{r_k}|}. \end{aligned}$$

由此, 可以证明模糊平均树解 $AT_j^{cg}(v, \rho)$ 满足模糊分支公平性, 即

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j \in B^a} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}^t))}{B^a} &= \frac{\sum_{j \in B^b} (\gamma_j^{cg}(v, \rho) - \gamma_j^{cg}(v, \rho_{-ab}^t))}{B^b}. \end{aligned} \quad (6)$$

引理得证. \square

定理 1 对于任意模糊图对策 (v, ρ) , 模糊平均树解 $\gamma_j^{cg}(v, \rho)$ 可由模糊分支有效性和 cg 分支公平性唯一确定.

证明 在无圈模糊图 (v, ρ) 上, N/ρ 表示所有模糊分支的集合, 根据模糊分支有效性, 令 $c = |N/\rho|$, 可以确定 c 个线性独立方程. 同时, 模糊图 (N, ρ) 中包含 l 条边, 根据 cg 分支公平性, 可得到 l 个线性独立方程. 同时, $c + l = n$, 即根据式(3)和(5)可得到 n 个线性独立方程. 根据克莱姆法则, 由模糊分支有效性和 cg 分支公平性可确定唯一解.

综上所述, 当模糊图按照 cg 划分时, 模糊平均树解 $\gamma_j^{cg}(v, \rho)$ 是唯一的. 即由模糊分支有效性和 cg 分支公平性可确定唯一解 $AT_j^{cg}(v, \rho)$. \square

定理 2 对于任意模糊图对策 (v, ρ) , 模糊平均树解 $AT_j^{cg}(v, \rho)$ 可由模糊分支有效性和模糊分支公平性唯一确定.

证明 在无圈模糊图 (v, ρ) 上, N/ρ 表示所有模糊分支的集合, 根据模糊分支有效性, 令 $c = |N/\rho|$, 可以确定 c 个线性独立方程. 同时, 模糊图 (N, ρ) 中包含 l 条边, 根据模糊分支公平性, 当任意边的合作水平都减去 t 时, $t \leq \bigwedge \rho$, 可得到 l 个线性独立方程. 同时, $c + l = n$, 即根据式(3)和(6)可得到 n 个线性独立方程. 根据克莱姆法则, 由模糊分支有效性和模糊分支公平性可确定唯一解.

综上所述, 当模糊图按照 cg 划分时, 模糊平均树解 $\gamma_j^{cg}(v, \rho)$ 是唯一的. 即由模糊分支有效性和模糊分支公平性可确定唯一解 $\gamma_j^{cg}(v, \rho)$. \square

4 任意图上的模糊平均树解

Herings 等^[4] 将无圈图上的平均树解拓展到任意图, 根据式(1), 对于任意图对策 (v, r) , 令 \mathcal{C}^L 代表所有可行 n 元组的集合. 在任一可行 n 元组中, 任意参与者 i 的边际贡献为

$$m_i^C(v, r) = v(C_i) - \sum_{B \in \mathcal{C}^r(C_i \setminus i)} v(B).$$

任意图上的平均树解为

$$AT^C(v, r) = \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}^L} m^C(v, r)}{|\mathcal{C}^L|}.$$

在任意模糊图上, 用 cg 对使用 DFS 算法得到的生成树进行划分. 同样, 对模糊图 ρ 的划分水平可以用一个确定的序列来表示, 即 $\{(r_k, s_k)\}_{k=1}^m$. 则任意图的模糊平均树解表达式为

$$\gamma^{cg, C}(v, \rho) = \frac{1}{|\mathcal{C}^L|} \sum_{C \in \mathcal{C}^L} \sum_{k=1}^m s_k m^C(v, r_k). \quad (7)$$

当图为树图时, \mathcal{C}^L 代表 DFS 算法得到的生成树数目, $m^C(v, r_k) = t(v, r_k)$, 即 $\gamma^{cg, C}(v, \rho) = \gamma^{cg}(v, \rho)$.

5 模糊平均树解的稳定性

Herings 等^[3] 定义了无圈图上的平均树解, 对于任意无圈图对策 (v, r) , 当其特征函数满足超可加性时, 平均树解在核心内, 即

$$AT(v, r) \in C(v, r).$$

定义 10 对于任意模糊图对策 (v, ρ) , 它的核心定义为

$$C(v, \rho) = \left\{ x \in \mathbf{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v^\rho(N), \sum_{i \in B} x_i \geq v^\rho(B), B \in 2^N \right\}.$$

定理 3 对于任意模糊图对策 (v, ρ) , 当模糊平均树解 $\gamma_j^{cg}(v, \rho)$ 满足超可加性时, $\gamma^{cg}(v, \rho) \in C(v, \rho)$.

证明 对于任意 $j \in B, B \subseteq N$, 无圈图上的平均树解满足

$$\sum_{j \in B} AT_j(v, r) \geq v(B).$$

在模糊图 (v, ρ) 上, 对于任意 $j \in B, B \subseteq N$, 模糊平均树解满足

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B} \gamma_j^{cg}(v, \rho) &= \\ \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^m s_k AT_j(v, r_k) &= \\ \sum_{S \in B/\rho} \sum_{j \in S} \sum_{k=1}^m s_k AT_j(v, r_k) &= \\ \sum_{k=1}^m s_k \sum_{S \in B/\rho} \sum_{j \in B} AT_j(v, r_k) &\geq \\ \sum_{S \in B/\rho} \sum_{k=1}^m s_k v_{r_k}(S) &= v^\rho(B). \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)可知, $\sum_{j \in B} \gamma_j^{cg}(v, \rho) \geq v^\rho(B)$, 即 $\gamma^{cg}(v, \rho) \in C(v, \rho)$. \square

6 模糊平均树解算例分析

由供应商、制造商和零售商组成的三级供应链中, 其相互之间的合作只在于有直接交流的上下游企业之间. 供应商 a 、制造商 b 、零售商 c 构成的供应链图对策为 $(v, r), N = \{a, b, c\}, L = \{\{ab\}, \{bc\}\}$. 假设在不同合作情况下的收益为 $v(a) = 82, v(b) = 40, v(c) = 18, v(ab) = 320, v(bc) = 230, v(abc) = 760$. 但是, 每个企业的参与程度是模糊的, 不同企业之间的合作程度也是模糊的. 假设 $\rho(a) = 0.8, \rho(b) = 0.6, \rho(c) = 0.6, \rho(ab) = 0.5, \rho(bc) = 0.4, s_1 = 0.4, s_2 = 0.1, s_3 = 0.1, s_4 = 0.2, \gamma_a^{cg}(v, \rho) = 135.23, \gamma_b^{cg}(v, \rho) = 165.9, \gamma_c^{cg}(v, \rho) = 67.07$ (见图3).

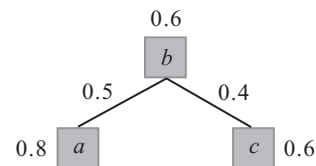


图3 供应链模糊图

根据模糊平均树解 $\gamma_j^{cg}(v, r)$ 的定义, 通过计算可得参与者 a, b, c 在不同子图 $\{r_k\}_{k=1}^4$ 上的收益, 结果见表1.

表1 参与者 a, b, c 在不同子图上的收益

| 子图 r_k | $\gamma_a(v, r_k)$ | $\gamma_b(v, r_k)$ | $\gamma_c(v, r_k)$ |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|
| r_1 | $\frac{694}{3}$ | 370 | $\frac{476}{3}$ |
| r_2 | 148 | 172 | 18 |
| r_3 | 82 | 40 | 18 |
| r_4 | 82 | 0 | 0 |

根据式(2),在模糊图 ρ 上经计算可得参与者 a 、 b 、 c 的模糊平均树解,见表2.

表 2 参与者 a 、 b 、 c 的模糊平均树解

| 模糊图 ρ | $\gamma_a^{cg}(v, \rho)$ | $\gamma_b^{cg}(v, \rho)$ | $\gamma_c^{cg}(v, \rho)$ |
|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ρ | 131.93 | 169.2 | 67.07 |

根据分支有效性,经计算可得大联盟的收益为

$$\gamma^{cg}(v, \rho) = \sum_{i \in N} \gamma_i^{cg}(v, \rho) = 368.2.$$

接下来,验证第5节任意图上的模糊平均树解 $\gamma^{cg,C}(v, \rho)$.当图结构为树图时,仍采用上述例子,经计算可得3个生成树:

- 1) $C_a = \{a, b, c\}, C_b = C_a \setminus \{a\} = \{b, c\}, C_c = C_b \setminus \{b\} = \{c\};$
- 2) $C_b = \{a, b, c\}, C_a = \{a\}, C_c = \{c\};$
- 3) $C_c = \{a, b, c\}, C_b = C_c \setminus \{c\} = \{a, b\}, C_a = C_b \setminus \{b\} = \{a\}.$

根据式(7),可得大联盟的收益为

$$\begin{aligned} \gamma^{cg,C}(v, \rho) &= \frac{1}{|CL|} \sum_{C \in CL} \sum_{k=1}^m s_k m^C(v, r_k) = \\ &= \frac{1}{3}(368.2 + 368.2 + 368.2) = 368.2. \end{aligned}$$

由此可见,当图为树图时,任意图上的模糊平均树解 $\gamma^{cg,C}(v, \rho)$ 与模糊平均树解 $\gamma^{cg}(v, \rho)$ 一致.

由上例可以看出,模糊平均树解能被有效运用到实际问题中.现实生活中,由于合作形成的网络结构是错综复杂的,不仅存在自上而下的关系,而且还存在有圈的网络关系;同时,参与者之间的合作可能是模糊的.因此,对于模糊平均树解的研究具有很大的实际意义.

7 结 论

本文主要考虑了模糊图上的平均树解,根据cg对模糊图进行划分,定义了模糊平均树解.同时,证明了其是满足模糊分支有效性和cg分支公平性的唯一解,也是满足模糊分支有效性和模糊分支公平性的唯一解.在此基础上,将模糊平均树解从无圈图拓展到任意图上,给出了任意图上的模糊平均树解的表达式.最后,通过供应链算例来计算模糊平均树,为使该解能应用到实际问题中提供了参考.

参考文献(References)

[1] Shapley L S. A value for n -person games[C]. Contributions to the Theory of Games II. Princeton: Princeton University Press, 1953: 307-317.
 [2] Myerson R B. Graphs and cooperation in games[J]. Mathematics of Operations Research, 1977, 2(3): 225-229.

[3] Herings P J J, Van der Laan G, Talman D. The average tree solution for cycle-free graph games[J]. Games and Economic Behavior, 2008, 62(1): 77-92.
 [4] Herings P J J, Van der Laan G, Talman A J J, et al. The average tree solution for cooperative games with communication structure[J]. Games and Economic Behavior, 2010, 68(2): 626-633.
 [5] Baron R, Béal S, Rémila E, et al. Average tree solutions and the distribution of Harsanyi dividends[J]. International Journal of Game Theory, 2011, 40(2): 331-349.
 [6] Van den Brink R, Herings P J J, Van der Laan G, et al. The average tree permission value for games with a permission tree[J]. Economic Theory, 2015, 58(1): 99-123.
 [7] Aubin J P. Cooperative fuzzy games[J]. Mathematics of Operations Research, 1981, 6(1): 1-13.
 [8] Tsurumi M, Tanino T, Inuiguchi M. A shapley function on a class of cooperative fuzzy games[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(3): 596-618.
 [9] Jiménez-Losada A, Fernández J R, Ordóñez M, et al. Games on communication structures with Choquet players[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 207(2): 836-847.
 [10] Jiménez-Losada A, Fernández J R, Ordóñez M. Myerson values for games with fuzzy communication structure[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 213(16): 74-90.
 [11] Jiménez-Losada A. Models for cooperative games with fuzzy relations among the agents[M]. Berlin: Springer, 2017: 99-158.
 [12] Fernández J R, Gallego I, Jiménez-Losada A, et al. The cg-position value for games on fuzzy communication structures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 341: 37-58.
 [13] Nie C P, Zhang Q. The average tree solution in graph games with fuzzy coalitions[J]. Operational Research and Management Science, 2012, 16(4): 77-85.
 [14] Nie C P, Zhang Q. Fuzzy average tree solution for graph games with fuzzy colitions[C]. Fuzzy Information & Engineering and Operations Research & Management. Berlin: Springer, 2013, 4(3): 409-417.
 [15] Yang J, Lai L B, Li D F. A-T solution of graph cooperative games with interval fuzzy coalitions and risk preference[J]. Control and Decision, 2017, 32(2): 299-304.
 [16] Su D F, Yang J. Distribution model of fuzzy graph cooperative games with restricted alliance and its application[J]. Journal of Fuzhou University: Natural Science Edition, 2018, 46(4): 458-465.

作者简介

单而芳(1965—),男,教授,博士生导师,从事图论及其应用、合作博弈等研究, E-mail: efshan@i.shu.edu.cn;
 林硕颖(1994—),女,硕士生,从事合作博弈的研究, E-mail: 18817279958@163.com;
 史纪磊(1987—),男,讲师,博士生,从事合作博弈的研究, E-mail: shijilei1987@163.com.

(责任编辑: 李君玲)