

控制与决策

Control and Decision

近似最小一乘意义下的鲁棒卡尔曼滤波器

郭蕴华, 刘俊杰, 汪敬东, 牟军敏, 胡义

引用本文:

郭蕴华, 刘俊杰, 汪敬东, 等. 近似最小一乘意义下的鲁棒卡尔曼滤波器[J]. 控制与决策, 2020, 35(10): 2399–2406.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0286>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于递推近似最小一乘的多传感器系统偏差稳健估计算法

Multi-sensor bias robust estimation based on recursive approximate least absolute deviation

控制与决策. 2019, 34(3): 495–502 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1204>

简化高阶强跟踪容积卡尔曼滤波及其在组合导航中的应用

Reduced high-degree strong tracking cubature Kalman filter and its application in integrated navigation system

控制与决策. 2019, 34(10): 2105–2114 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1757>

基于Huber的鲁棒广义高阶容积卡尔曼滤波算法

Huber-based robust generalized high-degree cubature Kalman filter

控制与决策. 2018, 33(1): 88–94 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1445>

基于不确定模型误差系统的变分贝叶斯STCKF

Variational Bayesian STCKF for systems with uncertain model errors

控制与决策. 2016, 31(12): 2255–2260 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1594>

基于交互式多模型的不敏卡尔曼概率假设密度滤波算法

Unscented Kalman probability hypothesis density filter based on interacting multiple model

控制与决策. 2016, 31(12): 2163–2169 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1332>

近似最小一乘意义下的鲁棒卡尔曼滤波器

郭蕴华^{1,2†}, 刘俊杰^{1,2}, 汪敬东^{1,2}, 牟军敏^{1,3}, 胡义^{1,2}

(1. 武汉理工大学 高性能舰船技术教育部重点实验室, 武汉 430063; 2. 武汉理工大学 能源与动力工程学院, 武汉 430063; 3. 武汉理工大学 航运学院, 武汉 430063)

摘要: 当存在高污染率的野值观测时, 现有的鲁棒卡尔曼滤波器的数值稳定性和抗差能力可能会严重退化. 为此, 基于近似最小一乘估计和修正的高斯牛顿方法提出一种新的鲁棒卡尔曼滤波器, 以减小含野量测对滤波器的不利影响. 通过条件数分析和影响函数分析, 从理论上证明所提出方法的数值稳定性和抗差能力均好于基于 Huber 估计的卡尔曼滤波器. 通过仿真实验对理论分析结果进行验证. 仿真结果表明, 在只有少量野值观测的情况下, 所提出的滤波器与 Huber 卡尔曼滤波器的估计性能大致相当; 而在含有高污染率的野值观测时, 所提出的滤波器的估计性能明显好于 Huber 卡尔曼滤波器. 在仿真实验中还对比了几种滤波器的计算花费, 发现所提出滤波器的计算代价小于 Huber 卡尔曼滤波器的计算代价.

关键词: 卡尔曼滤波; 鲁棒滤波; 最小一乘; 影响函数; 条件数; 数值稳定性

中图分类号: TP713

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0286

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 郭蕴华, 刘俊杰, 汪敬东, 等. 近似最小一乘意义下的鲁棒卡尔曼滤波[J]. 控制与决策, 2020, 35(10): 2399-2406.

Robust Kalman filter based on approximate least absolute deviation

GUO Yun-hua^{1,2†}, LIU Jun-jie^{1,2}, WANG Jing-dong^{1,2}, MOU Jun-min^{1,3}, HU Yi^{1,2}

(1. Key Laboratory of High Performance Ship Technology of Ministry of Education, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China; 2. School of Energy and Power Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China; 3. School of Navigation, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China)

Abstract: If measurements contain a high proportion of outlier data, the numerical stability and robustness of existing robust Kalman filters may be seriously degraded. Therefore, this paper proposes a novel robust Kalman filter based on the approximate least absolute deviation and modified Gauss-Newton method to reduce the adverse effects of the outlier measurement on the filtering. Through the analysis based on the condition number and influence function, it is proved theoretically that the numerical stability and robustness of the proposed approach are preferable to those of Huber-based Kalman filter. The theoretical analysis results are verified by the simulation experiments. The simulation results show that the performance of the proposed filter is almost equivalent to that of the Huber-based Kalman filter in the case with low proportion of outlier measurements. However, the proposed filter exhibits more superior performance than the Huber-based Kalman filter in the case with high proportion of outlier measurements. The comparison of computational cost of several filters is also performed by the simulation experiments. It is found that the computational cost of the proposed filter is less than the computational cost of the Huber-based Kalman filter.

Keywords: Kalman filter; robust filter; least absolute deviation; influence function; condition number; numerical stability

0 引言

卡尔曼滤波器(Kalman filter, KF)作为一种最小均方误差意义下的线性最优估计器, 在目标跟踪、导航定位和故障预测等领域得到了广泛的应用^[1-3]. 在标准卡尔曼滤波的基础上, 研究人员又陆续提出了扩

展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)^[4]、无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF)^[5]、容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF)^[6]和粒子滤波(particle filter, PF)^[7]等非线性滤波器. 然而, 当测量噪声含有污染分布时, 这些滤波器的性能可能会严重退

收稿日期: 2019-03-13; 修回日期: 2019-07-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51579201); 工信部高技术科研项目(MC-201710-H01).

责任编辑: 王燕舞.

†通讯作者. E-mail: wtugyh@163.com.

化.在实际工程中,由于电磁干扰、传输错误和设备老化等因素,传感器量测噪声并非完全服从单纯的高斯分布,有可能含有大量的量测野值.为此,Huber^[8]提出了广义极大似然估计(M估计),有效地抑制了野值对估计结果的影响.此后,Boncellet等^[9]提出了基于Huber估计的卡尔曼滤波器(Huber-based Kalman filter, HKF),提高了滤波器的抗野能力. HKF是一种线性的鲁棒滤波器,受其启发,研究人员又陆续提出了多种非线性鲁棒滤波器. Karlgaard等^[10]提出了基于Huber估计的分开差分滤波器(Huber-based divided difference filter, HDDF),可以解决非线性滤波中的鲁棒性问题. Soken等^[11]提出了一种鲁棒的扩展卡尔曼滤波器(robust extended Kalman filter, REKF),并将其应用于含有测量故障的小卫星姿态估计问题. Chang等^[12]提出了一种基于Huber估计的UKF方法(Huber-based unscented Kalman filter, HUKF),该方法的性能优于HDDF. 黄玉等^[13]提出了两种基于Huber估计的CKF滤波器(Huber-based cubature Kalman filter, HCKF),并证明了混合高斯噪声条件下这两种HCKF的性能好于传统的CKF. Zhao等^[14-15]在最小化Huber代价函数的基础上,将影响函数导出的渐近误差协方差矩阵用于状态预测,提出了新的鲁棒EKF和鲁棒UKF方法.

上述鲁棒卡尔曼滤波方法存在一些共性问题:1)在多维滤波估计中,可能存在数值稳定性差的问题;2)当存在高污染率的野值观测时,滤波性能会严重退化. 对此,本文提出一种近似最小一乘意义下的鲁棒卡尔曼滤波器(approximate least absolute deviation-based Kalman filter, ALADKF),可以有效地解决上述问题. 通过理论分析和仿真实验,表明了ALADKF在数值稳定性和抗差能力方面明显好于传统的基于Huber估计的卡尔曼滤波器.

1 基于Huber估计的卡尔曼滤波器

考虑如下的线性系统模型:

$$X_{k+1} = FX_k + w_k, \quad (1)$$

$$Z_{k+1} = HX_{k+1} + \nu_{k+1}. \quad (2)$$

其中: $X_k \in R^n$ 和 $Z_k \in R^m$ 分别为 k 时刻的状态向量和量测向量; F 和 H 分别为状态转移矩阵和量测转换矩阵; w_k 和 ν_k 分别称为过程噪声和量测噪声,其协方差矩阵分别为 Q_k 和 R_k . 式(1)和式(2)分别称为状态方程和量测方程. 对于式(1)和式(2)所描述的系统模型,标准KF滤波方程为

$$\bar{X}_{k+1} = F\hat{X}_k, \quad (3)$$

$$\bar{P}_{k+1} = F P_k F^T + Q_k, \quad (4)$$

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1} H^T (H \bar{P}_{k+1} H^T + R_{k+1})^{-1}, \quad (5)$$

$$\hat{X}_{k+1} = \bar{X}_{k+1} + K_{k+1} (Z_{k+1} - H \bar{X}_{k+1}), \quad (6)$$

$$P_{k+1} = \bar{P}_{k+1} - K_{k+1} H \bar{P}_{k+1}. \quad (7)$$

已经证明,若 w_k 和 ν_k 为互不相关的零均值高斯白噪声,则式(3)~(7)所描述的标准KF为最小均方误差意义下的最优估计器^[1]. 不过,量测噪声为单一高斯噪声只是一种理想情形,实际量测可能含有野值,其分布函数可以描述为如下的混合分布:

$$G_{\text{mix}} = (1 - \varepsilon)F_N + \varepsilon F_P. \quad (8)$$

其中: F_N 为量测噪声的主体分布,一般假定为高斯分布; F_P 为污染分布,它可以是方差远大于主体分布方差的任意厚尾分布; ε 为污染率,其值越大,则量测中的野值越多. 一旦量测中含有大量的野值,标准KF的性能会大大退化^[10-15]. 在此情况下, HKF可以尽量降低有害量测的影响,其与标准KF的主要区别在于滤波增益被重构为^[9-10,12]

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1} H^T (H \bar{P}_{k+1} H^T + R_{k+1,h})^{-1}, \quad (9)$$

其中

$$R_{k+1,h} = R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1} R_{k+1}^{T/2}. \quad (10)$$

式(10)中, $\Psi_z = \text{diag}[\Phi(e_i)]$ 为稳健因子, $\Phi(e_i)$ 为等价权函数^[16],即

$$\Phi(e_i) = \begin{cases} 1, & |e_i| < \beta; \\ \beta/|e_i|, & |e_i| \geq \beta. \end{cases} \quad (11)$$

其中: e_i 为 $R_{k+1}^{-1/2} (Z_{k+1} - H \bar{X}_{k+1})$ (即加权残差向量)的第 i 个分量, β 为一个设定的阈值. 在HDDF^[10]、HUKF^[12]和HCKF^[13]等非线性鲁棒滤波方法中,也采用了式(11)所定义的等价权函数.

2 基于近似最小一乘估计的卡尔曼滤波器

近似最小一乘意义下^[17]的 k 时刻的估计目标函数可以定义为

$$J_k = \sum_{j=1}^k \lambda_{j,k}. \quad (12)$$

其中

$$\lambda_{j,k} = [(Z_j - H F^{j-k} X_k)^T \Sigma_{j,k}^{-1} (Z_j - H F^{j-k} X_k)]^{1/2}, \quad (13)$$

$$\Sigma_{j,k} =$$

$$H \left[\sum_{i=1}^{k-j} F^{j-k+i-1} Q_{k-i} (F^T)^{j-k+i-1} \right] H^T + R_j. \quad (14)$$

J_k 的一阶导为

$$g_k = - \sum_{j=1}^k (F^T)^{j-k} H^T \Sigma_{j,k,a}^{-1} [Z_j - HF^{j-k} X_k], \quad (15)$$

其中

$$\Sigma_{j,k,a} = \lambda_{j,k} \Sigma_{j,k}. \quad (16)$$

当 \hat{X}_k 是使式(12)最小化的最优估计时,有

$$g_k|_{X_k=\hat{X}_k} = - \sum_{j=1}^k (F^T)^{j-k} H^T \Sigma_{j,k,a}^{-1} (Z_j - HF^{j-k} \hat{X}_k) = 0. \quad (17)$$

并且,其二阶导为

$$G_k|_{X_k=\hat{X}_k} = \sum_{j=1}^k (F^T)^{j-k} H^T \Sigma_{j,k,a}^{-1} HF^{j-k} - \sum_{j=1}^k \Delta_{j,k}, \quad (18)$$

其中

$$\Delta_{j,k} = \sum_{j=1}^k [(F^T)^{j-k} H^T \Sigma_{j,k,a}^{-1} (Z_j - HF^{j-k} \hat{X}_k) \cdot (Z_j - HF^{j-k} \hat{X}_k)^T \Sigma_{j,k,a}^{-1} HF^{j-k} \lambda_{j,k}^{-3}]. \quad (19)$$

考虑式(18)不一定是正定矩阵,故定义式(18)的修正矩阵为

$$G_{k,a}|_{X_k=\hat{X}_k} = G_k|_{X_k=\hat{X}_k} + \sum_{j=1}^k \Delta_{j,k} = \sum_{j=1}^k (F^T)^{j-k} H^T \Sigma_{j,k,a}^{-1} HF^{j-k}. \quad (20)$$

不难证明,式(20)为正定矩阵.

在 $k+1$ 时刻,目标函数为

$$J_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_{j,k+1}, \quad (21)$$

其一阶导为

$$g_{k+1} = - \sum_{j=1}^{k+1} (HF^{j-k-1})^T \Sigma_{j,k+1,a}^{-1} (Z_j - HF^{j-k-1} X_{k+1}). \quad (22)$$

将其一步外推,有

$$X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} = F \hat{X}_k. \quad (23)$$

代入式(22),并考虑式(17),则有

$$g_{k+1}|_{X_{k+1}=F\hat{X}_k} = - F^{-T} \sum_{j=1}^k (F^T)^{j-k} H^T \Sigma_{j,k+1,a}^{-1} (Z_j - HF^{j-k} \hat{X}_k) -$$

$$H^T R_{k+1,a}^{-1} (Z_{k+1} - HF \hat{X}_k) \approx F^{-T} g_k|_{X_k=\hat{X}_k} - H^T R_{k+1,a}^{-1} (Z_{k+1} - HF \hat{X}_k) = - H^T R_{k+1,a}^{-1} [Z_{k+1} - HF \hat{X}_k], \quad (24)$$

其二阶导为

$$G_{k+1}|_{X_{k+1}=F\hat{X}_k} = \sum_{j=1}^{k+1} (HF^{j-k-1})^T \Sigma_{j,k+1,a}^{-1} HF^{j-k-1} - \sum_{j=1}^{k+1} \Delta_{j,k+1}. \quad (25)$$

类似于式(20),定义其修正式为

$$G_{k+1,a}|_{X_{k+1}=F\hat{X}_k} = G_{k+1}|_{X_{k+1}=F\hat{X}_k} + \sum_{j=1}^{k+1} \Delta_{j,k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} (HF^{j-k-1})^T \Sigma_{j,k+1,a}^{-1} HF^{j-k-1} = F^{-T} \left[\sum_{j=1}^k (HF^{j-k})^T \Sigma_{j,k+1,a}^{-1} HF^{j-k} \right] F^{-1} + H^T R_{k+1,a}^{-1} H. \quad (26)$$

为方便推导,令

$$H_k = [(F^{-T})^{1-k} H^T, (F^{-T})^{2-k} H^T, \dots, H^T]^T, \quad (27)$$

$$E_k = \begin{bmatrix} \Sigma_{1,k,a} & & & \\ & \Sigma_{2,k,a} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{k,a} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

则式(20)和(26)可以分别表示为

$$G_{k,a}|_{X_k=\hat{X}_k} = H_k^T E_k^{-1} H_k, \quad (29)$$

$$G_{k+1,a}|_{X_{k+1}=F\hat{X}_k} = F^{-T} H_k^T [E_k + H_k F^{-1} Q_k F^{-T} H_k^T]^{-1} H_k F^{-1} + H^T R_{k+1,a}^{-1} H. \quad (30)$$

令

$$P_k = G_{k,a}^{-1}, \quad (31)$$

$$\bar{P}_{k+1}^{-1} = F^{-T} H_k^T [E_k + H_k F^{-1} Q_k F^{-T} H_k^T]^{-1} H_k F^{-1}. \quad (32)$$

根据矩阵求逆定理,不难证明

$$\bar{P}_{k+1} = F P_k F^T + Q_k. \quad (33)$$

将式(32)代入(30),有

$$G_{k+1,a}|_{X_{k+1}=F\hat{X}_k} = \bar{P}_{k+1}^{-1} + H^T R_{k+1,a}^{-1} H. \quad (34)$$

令

$$P_{k+1} = G_{k+1,a}^{-1}|_{X_{k+1}=F\hat{X}_k} =$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{P}_{k+1}^{-1} + H^T R_{k+1,a}^{-1} H)^{-1} = \\
& \bar{P}_{k+1} - \bar{P}_{k+1} H^T (H \bar{P}_{k+1} H^T + R_{k+1,a})^{-1} H \bar{P}_{k+1}, \quad (35)
\end{aligned}$$

根据修正的高斯牛顿方法^[18],有

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{k+1} &= \bar{X}_{k+1} - G_{k+1,a}^{-1} g_{k+1} |_{X_{k+1}=\bar{X}_{k+1}} = \\
& \bar{X}_{k+1} + P_{k+1} H^T R_{k+1,a}^{-1} [Z_{k+1} - H \bar{X}_{k+1}]. \quad (36)
\end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned}
K_{k+1} &= \bar{P}_{k+1} H^T (H \bar{P}_{k+1} H^T + R_{k+1,a})^{-1} = \\
& \bar{P}_{k+1} H^T (H \bar{P}_{k+1} H^T + \lambda_{k+1} R_{k+1})^{-1}, \quad (37)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1} &= \\
& [(Z_{k+1} - H \bar{X}_{k+1})^T R_{k+1}^{-1} (Z_{k+1} - H \bar{X}_{k+1})]^{\frac{1}{2}}. \quad (38)
\end{aligned}$$

同时,将式(35)化为

$$P_{k+1} = \bar{P}_{k+1} - K_{k+1} H \bar{P}_{k+1}. \quad (39)$$

考虑

$$\begin{aligned}
& P_{k+1} H^T R_{k+1,a}^{-1} = \\
& \bar{P}_{k+1} H^T (H \bar{P}_{k+1} H^T + R_{k+1,a})^{-1}, \quad (40)
\end{aligned}$$

于是,式(36)化为

$$\hat{X}_{k+1} = \bar{X}_{k+1} + K_{k+1} (Z_{k+1} - H \bar{X}_{k+1}). \quad (41)$$

综合式(23)、(33)、(37)、(38)、(39)和(41),即构成完整的近似最小一乘意义的鲁棒卡尔曼滤波器(ALADKF). 式(38)所定义的 λ_{k+1} 可以视为一个自适应因子,它是考虑所有量测维度上的残差的综合度量. 当 λ_{k+1} 较大时,说明当前量测 Z_{k+1} 严重偏离预测值 \bar{X}_{k+1} ,即 Z_{k+1} 为野值的可能性较大,此时依据式(37)计算的 K_{k+1} 变小,减小了式(41)中量测信息的所占比重;反之,可以认为量测中的可用信息较多,因而依据式(37), K_{k+1} 可以取值较大. 此外,从目标函数的角度考虑,近似最小一乘意义下目标函数的求和式的每一项都带有平方根,因此,相对于最小二乘的目标函数,其削弱了野值量测的负面影响. 与经典的HKF滤波器相比,ALADKF的数值稳定性和抗差能力更好,后面将通过理论分析结合仿真实验的方式予以验证.

3 数值稳定性分析

KF、HKF、ALADKF中需要求逆的协方差矩阵依次为

$$P_{zz,k+1}^{\text{KF}} = H \bar{P}_{k+1} H^T + R_{k+1}, \quad (42)$$

$$P_{zz,k+1}^{\text{HKF}} = H \bar{P}_{k+1} H^T + R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1} R_{k+1}^{T/2}, \quad (43)$$

$$P_{zz,k+1}^{\text{ALADKF}} = H \bar{P}_{k+1} H^T + \lambda_{k+1} R_{k+1}. \quad (44)$$

显然,如果式(42)~(44)中各协方差矩阵的条件数过大,则会导致递推计算的数值稳定性变差. 为了便于分析,首先证明定理1. 先给出如下引理:

引理1 对于 $m \times m$ 的Hermite矩阵 $R_{k+1}^{1/2}$ 和 $\Psi_z^{-1/2}$,具有奇异值 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$,则对于 $1 \leq i \leq m$,有^[19]

$$\begin{aligned}
& \max_{r+s=m+i} [\sigma_r(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_s(\Psi_z^{-1/2})] \leq \sigma_i(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2}) \leq \\
& \min_{r+s=i+1} [\sigma_r(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_s(\Psi_z^{-1/2})]. \quad (45)
\end{aligned}$$

定理1 对于上述Hermite矩阵 $R_{k+1}^{1/2}$ 和 $\Psi_z^{-1/2}$,若满足

$$\text{cond}(\Psi_z^{-1/2}) \geq \text{cond}(R_{k+1}), \quad (46)$$

则

$$\text{cond}(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1} R_{k+1}^{T/2}) \geq \text{cond}(R_{k+1}) \quad (47)$$

必然成立.

证明 由引理1可得

$$\sigma_1(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2}) \geq \sigma_m(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_1(\Psi_z^{-1/2}), \quad (48)$$

$$\sigma_1(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_m(\Psi_z^{-1/2}) \geq \sigma_m(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2}). \quad (49)$$

若式(46)成立,则

$$\text{cond}(\Psi_z^{-1/2}) \geq \text{cond}(R_{k+1}^{1/2}) \quad (50)$$

一定成立. 因此有

$$\sigma_m(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_1(\Psi_z^{-1/2}) \geq \sigma_1(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_m(\Psi_z^{-1/2}). \quad (51)$$

由式(48)~(51)可得

$$\begin{aligned}
& \sigma_1(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2}) \geq \sigma_m(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_1(\Psi_z^{-1/2}) \geq \\
& \sigma_1(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_m(\Psi_z^{-1/2}) \geq \sigma_m(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2}). \quad (52)
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
& \text{cond}(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2}) = \frac{\sigma_1(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2})}{\sigma_m(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2})} \geq \\
& \frac{\sigma_n(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_1(\Psi_z^{-1/2})}{\sigma_1(R_{k+1}^{1/2}) \sigma_m(\Psi_z^{-1/2})} = \frac{\text{cond}(\Psi_z^{-1/2})}{\text{cond}(R_{k+1}^{1/2})}. \quad (53)
\end{aligned}$$

由于

$$\text{cond}(R_{k+1}) = [\text{cond}(R_{k+1}^{1/2})]^2, \quad (54)$$

将式(54)代入(46),可得

$$\text{cond}(\Psi_z^{-1/2}) \geq [\text{cond}(R_{k+1}^{1/2})]^2. \quad (55)$$

将式(55)代入(53)中,有

$$\text{cond}(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2}) \geq \text{cond}(R_{k+1}^{1/2}). \quad (56)$$

并考虑

$$\text{cond}(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1} R_{k+1}^{T/2}) = [\text{cond}(R_{k+1}^{1/2} \Psi_z^{-1/2})]^2 \quad (57)$$

和式(54), 则式(56)等价于(47). \square

式(43)中等价权函数 Ψ_z 是采用不同量测维度上分开检测的方法, 如果在某一维度上残差极大而其他维度上的残差较小, 则 Ψ_z 的条件数将是一个很大的数(注意, 野值不一定同时出现在所有量测维度上). 考虑到 $\text{cond}(\Psi_z^{-1}) = \text{cond}(\Psi_z)$, 此时式(46)容易满足, 因此, 根据定理 1 式(47)成立. 在 $\text{cond}(\Psi_z)$ 非常大的情况下, $H\bar{P}_{k+1}H^T$ 相对而言是较小的, 显然 $\text{cond}(P_{zz,k+1}^{\text{HKF}})$ 相对于 $\text{cond}(P_{zz,k+1}^{\text{KF}})$ 将是一个很大的数. 反观式(44), 由于有

$$\text{cond}(\lambda_{k+1}R_{k+1}) = \text{cond}(R_{k+1}), \quad (58)$$

即便 λ_{k+1} 非常大, $\text{cond}(P_{zz,k+1}^{\text{ALADKF}})$ 相对于 $\text{cond}(P_{zz,k+1}^{\text{HKF}})$ 仍会较小. 这表明, 在多维滤波估计时, 使用传统的 Huber 等价权函数的鲁棒滤波器由于采用了不同量测维度上分开检测的方法, 其鲁棒性的实现是以降低数值稳定性为代价的. 而 ALADKF 鲁棒性的增强并不特别影响滤波器的数值稳定性. 对此, 本文将通过仿真实验进行验证.

4 影响函数分析

影响函数是 Hampel 等^[20]提出的一种描述统计量受污染数据影响的敏感程度的度量, 它体现了滤波器的抗差能力. 对于 KF、HKF 和 ALADKF 而言, 其影响函数的泛函通式为

$$\text{IF}(T, F) = - \left[\int \frac{\partial \phi[T(G)]}{\partial T(G)} dF(x) \right]^{-1} \varphi[T(G)]. \quad (59)$$

其中: φ 为评价函数的导数; T 为待估计量; F 为量测噪声的主体分布; G 为含有异常数据的混合分布, 其可以表示为

$$G = (1 - \varepsilon)F + \varepsilon\Delta_x. \quad (60)$$

这里: ε 为污染率; Δ_x 是狄拉克脉冲函数, 表示污染分布. 对于各类滤波器, 其评价函数通式可以表示为

$$J(\hat{X}_k) = \sum_{j=1}^k \rho(v_j). \quad (61)$$

其中: $v_j = \Sigma_{j,k}^{-1/2}(HF^{j-k}\hat{X}_k - Z_j)$, 不失一般性, 可以假定 $v_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 符合独立同分布; $\rho(\cdot)$ 为关于 v_j 的某一度量. 则有

$$\begin{aligned} \varphi(V_k, G) &= \frac{\partial J}{\partial \hat{X}_k} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \rho(v_j)}{\partial \hat{X}_k} = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial v_j}{\partial \hat{X}_k} \frac{\partial \rho(v_j)}{\partial v_j}, \end{aligned} \quad (62)$$

其中 $V_k = [v_1^T \dots v_k^T]^T$. 记

$$\phi(v_j) = \frac{\partial \rho(v_j)}{\partial v_j}, \quad (63)$$

则式(62)化简为

$$\varphi(V_k, G) = -\bar{H}_k^T \cdot \psi_k. \quad (64)$$

其中: $\bar{H}_k = [h_1^T \dots h_k^T]^T, h_j = \Sigma_{j,k}^{-1/2}HF^{j-k}, \psi_k = [\phi(v_1)^T \dots \phi(v_k)^T]^T$. 将式(64)代入(59), 则各类滤波器的影响函数通式可以简化为

$$\begin{aligned} \text{IF}(V_k, F) &= \\ &= - \left[\int \frac{\partial [\varphi(V_k, F)]}{\partial \hat{X}_k} dF(V_k) \right]^{-1} \varphi(V_k, F) = \\ &= - \left[\int (-\bar{H}_k^T) \frac{\partial \psi_k}{\partial V_k} (-\bar{H}_k) dF(V_k) \right]^{-1} (-\bar{H}_k^T \psi_k) = \\ &= (\bar{H}_k^T \Omega_k \bar{H}_k)^{-1} (\bar{H}_k^T \psi_k). \end{aligned} \quad (65)$$

其中: $dF(V_k) = f(V_k)d(V_k) = \prod_{j=1}^k f(v_j)dv_j, \Omega_k = \text{diag}[\xi(v_1) \dots \xi(v_k)], \xi(v_j)$ 的计算方式如下:

$$\xi(v_j) = \int \frac{\partial \phi(v_j)}{\partial v_j} f(v_j)d(v_j). \quad (66)$$

根据式(65)和(66), 可以分别推导出 KF、HKF 和 ALADKF 的影响函数分别为

$$\text{IF}_{\text{KF}}(V_k, F) = (\bar{H}_k^T \bar{H}_k)^{-1} (\bar{H}_k^T V_k), \quad (67)$$

$$\text{IF}_{\text{HKF}}(V_k, F) = (\bar{H}_k^T \Omega_k^{\text{HKF}} \bar{H}_k)^{-1} (\bar{H}_k^T \psi_k^{\text{HKF}}), \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \text{IF}_{\text{ALADKF}}(V_k, F) &= \\ &= (\bar{H}_k^T \Omega_k^{\text{ALADKF}} \bar{H}_k)^{-1} (\bar{H}_k^T \psi_k^{\text{ALADKF}}). \end{aligned} \quad (69)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_k^{\text{HKF}} &= \text{diag}[\xi_{\text{HKF}}(v_{1,1}), \dots, \xi_{\text{HKF}}(v_{1,m}), \dots, \\ &= \xi_{\text{HKF}}(v_{k,1}), \dots, \xi_{\text{HKF}}(v_{k,m})]. \end{aligned} \quad (70)$$

$$\xi_{\text{HKF}}(v_{j,i}) = \begin{cases} \int f(v_{j,i})d(v_{j,i}), & |v_{j,i}| < \beta; \\ 0, & |v_{j,i}| \geq \beta. \end{cases} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \psi_k^{\text{HKF}} &= [\phi_{\text{HKF}}(v_{1,1}), \dots, \phi_{\text{HKF}}(v_{1,m}), \dots, \\ &= \phi_{\text{HKF}}(v_k), \dots, \phi_{\text{HKF}}(v_{k,m})]^T. \end{aligned} \quad (72)$$

$$\phi_{\text{HKF}}(v_{j,i}) = \begin{cases} v_{j,i}, & |v_{j,i}| < \beta; \\ \beta \cdot \text{sign}(v_{j,i}), & |v_{j,i}| \geq \beta. \end{cases} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \Omega_k^{\text{ALADKF}} &= \\ &= \text{diag}[\xi_{\text{ALADKF}}(v_1) \dots \xi_{\text{ALADKF}}(v_k)]. \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \xi_{\text{ALADKF}}(v_j) &= \\ &= \int \left[\frac{I_m}{(v_j^T v_j)^{1/2}} - \frac{v_j v_j^T}{(v_j^T v_j)^{3/2}} \right] f(v_j)d(v_j). \end{aligned} \quad (75)$$

$$\psi_k^{\text{ALADKF}} = [\phi_{\text{ALADKF}}(v_1)^T \dots \phi_{\text{ALADKF}}(v_k)^T]^T. \quad (76)$$

$$\phi_{\text{ALADKF}}(v_j) = \frac{v_j}{(v_j^T v_j)^{1/2}}. \quad (77)$$

式(67)中的 $\psi_k^{\text{KF}} = V_k$ 是无界的,因此,标准KF不具备抗差能力;而式(68)和(69)中的 ψ_k^{HKF} 和 ψ_k^{ALADKF} 均为有界的,故HKF和ALADKF的影响函数都是有界函数,它们都具有抗差能力.由于式(68)和(69)的形式较为复杂,直接比较这两种鲁棒滤波方法的抗差性能尤为困难,本文将通过仿真实验的方式进行对比分析.

5 仿真实验

5.1 仿真条件

考虑如下的线性系统模型:

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_k + w_k, \quad (78)$$

$$Z_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X_{k+1} + \nu_{k+1}. \quad (79)$$

其中:状态初始真值为 $X_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$;状态初始估计值为 $\hat{X}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$;采样次数为 $N = 500$;Monte Carlo 仿真次数 $M = 100$; $w_k \sim N(0, q)$; ν_k 服从混合高斯分布,其概率密度函数为

$$p(\nu_k) = (1 - \varepsilon)N(0, D_1) + \varepsilon\text{La}(0, D_2), \quad (80)$$

$N(0, D_1)$ 为高斯分布, $\text{La}(0, D_2)$ 为拉普拉斯分布.

本文设计4个算例以观察几种算法在不同野值污染率下的性能.这4个算例的污染率 ε 分别为0.05, 0.2, 0.3和0.4,其余条件统一为: $q = I_4$ 为 4×4

的单位阵, $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{0.5}$, $D_2 = 100D_1$.

算法实现采用Matlab.仿真实验的硬件配置为:CPU为Intel i7-6500U(主频2.5 GHz),8 G内存,512 G固态硬盘,未采用CPU超频和多线程技术.

5.2 实验结果与分析

图1为各滤波器的协方差条件数的平均值(即把单次滤波的条件数累加再除以总采样次数)随野值污染率 ε 变化的曲线;图2为算例4的影响函数的2范数曲线(由于4个算例的影响函数曲线基本一致,此

处仅给出算例4的);图3~图6为算例1~算例4的滤波误差2范数曲线.表1给出了几个算例的KF、HKF和ALADKF的平均计算时间.其中,影响函数和滤波误差的2范数可以分别用以下公式描述:

$$\|\text{IF}(V_k, F)\|_2 = \left[\sum_{i=1}^m \text{IF}(V_k, F)_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (81)$$

$$\|\hat{X} - X\|_2 = \left[\sum_{i=1}^m (\hat{X}_i - X_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (82)$$

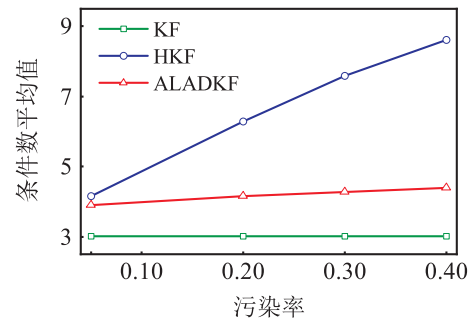


图1 条件数随污染率 ε 的变化

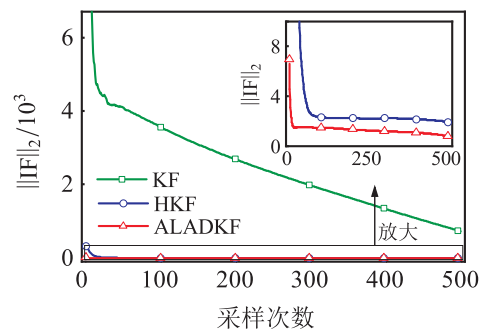


图2 影响函数(算例4, $\varepsilon = 0.40$)

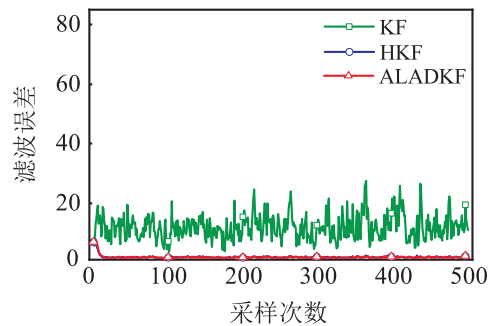


图3 滤波误差(算例1, $\varepsilon = 0.05$)

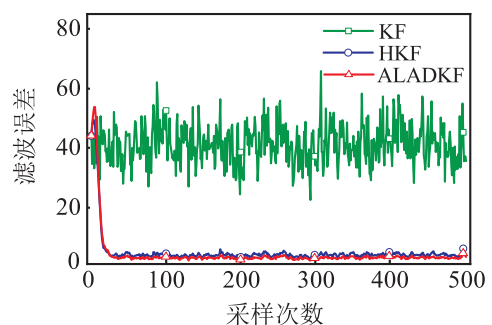


图4 滤波误差(算例2, $\varepsilon = 0.20$)

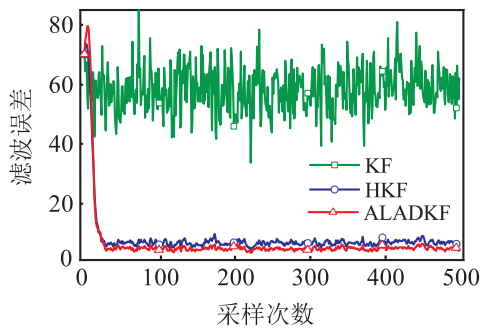


图5 滤波误差(算例3, $\epsilon = 0.30$)

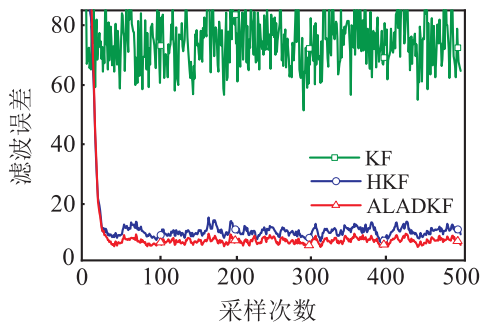


图6 滤波误差(算例4, $\epsilon = 0.40$)

表1 几种滤波器的平均计算时间 ms

算例	KF	HKF	ALADKF
1	14.2	33.9	26.5
2	13.5	34.7	25.8
3	13.4	35.6	27.8
4	13.6	34.3	28.1

从图1~图6和表1中可以看出:

1) 由条件数曲线可知, HKF的协方差条件数大于KF和ALADKF的协方差条件数. 而且, 随着野值污染率的增加, HKF的协方差条件数与另外两种滤波器的协方差条件数的差距会更加明显, 这说明HKF的数值稳定性较差, 并且会随野值污染率的增加而进一步恶化. ALADKF的协方差条件数也大于KF的协方差条件数, 但不同野值污染率下二者之间的差距变化不大. 这一结果与数值稳定性分析中式(47)和(58)基本吻合.

2) 由影响函数曲线可知, KF基本上不具备抗差能力, ALADKF和HKF都具有抗差能力, 而且ALADKF的抗差能力好于HKF. 即ALADKF对野值量测更加不敏, 其在高野值污染率下滤波性能退化更小(但并不意味其在低野值污染率下的滤波性能一定最好).

3) 从滤波误差曲线来看, 即便在野值污染率只有5%的情况下, KF的估计精度也出现了严重退化, 而且随着污染率的增加, KF的估计精度会越来越差. 此

外, 在污染率较低时, HKF与ALADKF的估计精度基本相当, 但随着野值污染率的增加, ALADKF较HKF在估计精度上的优势会越来越明显, 这与影响函数所反映的结果是一致的.

4) 表1说明, 在几种算法中, KF计算代价最小, HKF和ALADKF计算用时都高于KF, 但ALADKF的计算时间小于HKF. 这是因为, 相对于KF, HKF和ALADKF都进行了额外的计算; 并且, HKF需要计算矩阵的平方根, 而ALADKF仅需要计算 λ_{k+1} , 只涉及计算一个实数的平方根. 显然, 求实数平方根的计算代价小于求矩阵平方根的计算代价.

6 结论

在含有高污染率的野值观测下, 经典卡尔曼滤波器和Huber卡尔曼滤波器的性能会严重退化, 并且, 多维滤波估计下的Huber卡尔曼滤波器的数值稳定性会随着野值污染率的增加而越来越差. 对此, 本文提出了一种近似最小一乘意义下的鲁棒卡尔曼滤波器, 可以有效抑制野值观测对滤波性能的不利影响. 通过理论分析和仿真实验, 充分证明了所提出滤波器的数值稳定性和抗差能力好于Huber卡尔曼滤波器, 其在高污染率野值观测下的滤波性能的退化最小. 考虑到本文方法在抗差滤波性能和计算量等方面均优于Huber卡尔曼滤波器, 因此, 凡是适用于Huber卡尔曼滤波器的应用场合, 本文方法均能适用. 特别是在含有较多野值的多维量测环境下, 本文方法的优势会更加明显. 在后续的研究工作中, 将尝试将本文方法进一步扩展到非线性滤波方法(如EKF、UKF等)上, 并在无人船目标跟踪、船舶动力定位等实际工程问题中开展应用研究.

参考文献(References)

- [1] Liang C, Wen F X, Wang Z M. Trust-based distributed Kalman filtering for target tracking under malicious cyber attacks[J]. Information Fusion, 2019, 46: 44-50.
- [2] Motwani A, Sharma S K, Sutton R, et al. Interval Kalman filtering in navigation system design for an uninhabited surface vehicle[J]. Journal of Navigation, 2013, 66: 639-652.
- [3] Singleton R K, Strangas E G, Aviyente S. Extended Kalman filtering for remaining-useful-life estimation of bearings[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(3): 1781-1790.
- [4] Masazade E, Fardad M, Varshney P K. Sparsity-promoting extended Kalman filtering for target tracking in wireless sensor networks[J]. IEEE Signal Processing

- Letters, 2012, 19(12): 845-848.
- [5] Zhan R H, Wan J W. Iterated unscented Kalman filter for passive target tracking[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(3): 1155-1163.
- [6] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [7] Yang T, Mehta P G, Meyn S P. Feedback particle filter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(10): 2465-2480.
- [8] Huber P J. Robust estimation of a location parameter[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1964, 35(1): 73-101.
- [9] Boncelet C G, Dickinson B W. An approach to robust Kalman filtering[C]. The 22nd IEEE Conference on Decision and Control. New York: IEEE, 1983: 304-305.
- [10] Karlgaard C D, Schaub H. Huber-based divided difference filtering[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(3): 885-891.
- [11] Soken H E, Hajiyev C, Sakai S. Robust Kalman filtering for small satellite attitude estimation in the presence of measurement faults[J]. European Journal of Control, 2014, 20: 64-72.
- [12] Chang L, Hu B, Chang G, et al. Huber-based novel robust unscented Kalman filter[J]. IET Science, Measurement and Technology, 2012, 6(6): 502-509.
- [13] 黄玉, 武立华, 孙枫. 基于Huber M估计的鲁棒 Cubature 卡尔曼滤波算法[J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 572-576.
(Huang Y, Wu L H, Sun F. Robust cubature Kalman filter based on Huber M estimator[J]. Control and Decision, 2014, 29(3): 572-576.)
- [14] Zhao J B, Netto M, Mili L. A robust iterated extended Kalman filter for power system dynamic state estimation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(4): 3205-3216.
- [15] Zhao J B, Mili L. A robust generalized-maximum likelihood unscented Kalman filter for power system dynamic state estimation[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2018, 12(4): 578-592.
- [16] Huber P J, Ronchetti E M. Robust statistics[M]. 2nd ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2009: 45-55.
- [17] Caccetta L, Qu B, Zhou G L. A globally and quadratically convergent method for absolute value equations[J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 48(1): 45-58.
- [18] Argyros I K, Magrenan A. Improved local convergence analysis of the Gauss-Newton method under a majorant condition[J]. Computational Optimization and Applications, 2015, 60(2): 423-439.
- [19] 沈光星, 陈立中. 乘积矩阵的奇异值估计[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 1999, 22(3): 26-28.
(Shen G X, Chen L Z. Estimation of singular values for product matrices[J]. Journal of Zhejiang Normal University: Natural Sciences, 1999, 22(3): 26-28.)
- [20] Hampel F, Ronchetti E M, Rousseeuw P J, et al. Robust statistics: The approach based on influence functions[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 1986: 40-56.

作者简介

郭蕴华(1975—), 男, 教授, 博士, 从事信息融合与工程优化等研究, E-mail: wtugyh@163.com;

刘俊杰(1996—), 男, 硕士生, 从事信息融合与工程优化的研究, E-mail: 2667647118@qq.com;

汪敬东(1993—), 男, 硕士生, 从事信息融合与工程优化的研究, E-mail: wjd@whut.edu.cn;

牟军敏(1974—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能航海信息处理等研究, E-mail: moujm@whut.edu.cn;

胡义(1975—), 男, 副教授, 博士, 从事船舶动力装置性能优化等研究, E-mail: huyiwhut@163.com.

(责任编辑: 李君玲)