

控制与决策

Control and Decision

一种基于前景理论的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言ELECTRE多属性决策方法

赵晓冬, 王飞, 张妮

引用本文:

赵晓冬, 王飞, 张妮. 一种基于前景理论的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言ELECTRE多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2020, 35(9): 2245–2251.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0066>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关测度

Correlation measures of Pythagorean hesitant fuzzy set

控制与决策. 2019, 34(5): 1018–1024 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1560>

基于前景理论的犹豫模糊TOPSIS多属性决策方法

Hesitant fuzzy TOPSIS multi-attribute decision method based on prospect theory

控制与决策. 2017, 32(5): 864–870 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0259>

基于证据理论和前景理论的犹豫-直觉模糊语言多准则决策方法

Multi-criteria decision-making method based on evidence theory and prospect theory for hesitant-intuitionistic fuzzy linguistic

控制与决策. 2017, 32(2): 333–339 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1598>

基于Pythagorean不确定语言的扩展VIKOR多属性群决策方法

Extended VIKOR method for multi-attribute group decision making based on Pythagorean uncertain linguistic information

控制与决策. 2017, 32(12): 2145–2152 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.1535>

基于Choquet积分的直觉不确定语言信息集结算子及其应用

Intuitionistic uncertain linguistic information aggregation operators based on Choquet integral and their application

控制与决策. 2016, 31(5): 842–852 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.0470>

一种基于前景理论的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言 ELECTRE 多属性决策方法

赵晓冬, 王飞[†], 张妮

(燕山大学 经济管理学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 针对属性权重已知、属性值为毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量的多属性决策问题, 提出一种前景理论和消去与选择转换法 (ELECTRE) 相结合的多属性决策方法. 首先给出毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言集的定义, 包括得分函数、距离测度和运算法则; 然后将前景理论引入该决策环境下, 构建前景价值矩阵, 运用传统 ELECTRE 法求得一致矩阵和矛盾矩阵, 并对其进行转化构建前景优/劣势判断矩阵, 进而求得总优/劣势值以确定备选方案的优劣排序; 最后通过算例分析验证所提出方法的有效性和可行性, 并与该决策环境下的传统 ELECTRE 法进行对比, 表明了该方法的优越性和实用性.

关键词: 前景理论; 毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量; 多属性决策

中图分类号: O159 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0066

引用格式: 赵晓冬, 王飞, 张妮. 一种基于前景理论的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言 ELECTRE 多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2245-2251.

Method for multi-attribute decision-making with Pythagorean hesitant fuzzy uncertain linguistic ELECTRE based on prospect theory

ZHAO Xiao-dong, WANG Fei[†], ZHANG Ni

(College of Economics and Management, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: A decision method of integrating the prospect theory with (ELECTRE) is proposed for multi-attribute decision-making, where the attribute weights are known and attribute values are in the form of the Pythagorean hesitant fuzzy uncertain linguistic number. First of all, the definition of the Pythagorean hesitant fuzzy uncertain linguistic set is given, including the scoring function, the distance measure and the algorithm. Then, a prospect value matrix is built by introducing the prospect theory into this decision-making environment, and the traditional ELECTRE method is used to obtain the consistency matrix and the contradiction matrix. The consistency matrix and contradiction matrix are obtained by using the traditional ELECTRE method, and the matrices are converted to construct the prospects superiority/inferiority judgment matrix. Thus, the total superiority/inferiority values are obtained to determine the ranking of alternatives. Finally, a numerical example is provided to illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method. Compared with the traditional ELECTRE method, the superiority and practicability of the proposed method are adequately verified.

Keywords: prospect theory; Pythagorean hesitant fuzzy uncertain linguistic number; multi-attribute decision-making

0 引言

多属性决策中最基本的环节就是对各决策方案决策信息的收集和整理. 作为多属性决策的进一步理论延伸, 不确定多属性决策的主要研究内容之一便是对决策过程中不确定决策信息描述和表达方式的探索. 自 Zadeh^[1] 于 1965 年首次提出模糊集理论以来, 其被迅速应用于社会的各个领域并不断地加以完

善^[2-5]. 其中刘卫峰等^[6-7] 在前人研究的基础上提出了毕达哥拉斯犹豫模糊集, 给出了相关的距离测度. 毕达哥拉斯犹豫模糊集受到广大学者的广泛关注并得到迅速发展^[8-10]. 另一方面, 经典的多属性决策方法都是以“期望效用理论”为基础建立的, 在多属性决策领域占有重要的地位^[11-13]. 但是在实际决策过程中, 决策者的非理性心理及其偏好的随机性和模糊

收稿日期: 2019-01-13; 修回日期: 2019-05-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71672167, 71671159); 教育部人文社会科学项目(16YJC630106, 16YJC880038); 河北省自然科学基金项目(G2016203236); 河北省社会科学基金项目(HB17GL094).

责任编辑: 李勇健.

[†]通讯作者. E-mail: 1021647174@qq.com.

性都会对决策结果产生不可忽视的影响. 为此, 专家学者提出许多新的理论, 其中典型的是由Kahneman等^[14]提出的前景理论, 并很好地应用结合在了犹豫模糊环境下^[15-18]. 它与期望效用理论的本质区别在于决策主体假设的不同, 前者假设决策主体是完全理性的, 后者考虑了其在决策过程中的非理性心理.

作为不确定多属性决策的经典方法之一, ELECTRE法被Almeida^[19]提出后, 凭借其很强的实用性广泛应用于社会各个领域, 并在后续的发展中产生了很多新的研究成果, 但是国内外相关研究还较少出现将前景理论与ELECTRE法相结合的情况. 鉴于此, 本文尝试创新研究对象及方法, 将毕达哥拉斯犹豫模糊集与不确定语言术语集相结合, 提出一种新的模糊多属性决策的信息表达形式——毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言集, 定义了其包括得分函数、距离测度及运算比较法则在内的基本性质. 将前景理论引入该决策环境下, 构建前景决策矩阵, 并根据转化后的权重信息对传统的ELECTRE排序方法进行改进, 从而构建了基于前景理论的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言ELECTRE的多属性决策模型.

1 相关概念

1.1 毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量

本文借鉴直觉语言数^[20]的概念, 结合毕达哥拉斯犹豫模糊变量^[10]和不确定语言变量^[21]给出毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量的定义. 该变量集成了原有模糊集和语言术语集的优点: 不仅拥有更大的隶属度表示空间, 而且便于决策者进行定性描述, 从而更加全面准确地表达决策信息的模糊性, 更加符合实际决策情境.

定义1^[10] 令 X 为一给定的论域, 称

$$D = \{ \langle x, h_D(x), g_D(x) \rangle | x \in X \} \quad (1)$$

为定义在 X 上的毕达哥拉斯犹豫模糊集 (PHFS), 其中 $h_D(x) : x \rightarrow [0, 1]$ 和 $g_D(x) : x \rightarrow [0, 1]$ 分别为 x 隶属于和非隶属于 X 的程度, 并且对于所有的 $\gamma \in h_{D(x)}, \eta \in g_{D(x)}$, 均满足 $\gamma^2 + \eta^2 \leq 1$.

定义2^[21] 令 $S = \{s_i | i = 1, 2, \dots, t\}$ 为一个由有限元素组成的语言评价集, t 为奇数, s_i 为一个语言变量的可能值, 则下式称为一个不确定语言变量

$$S = [s_\alpha, s_\beta]. \quad (2)$$

定义3 令 X 为给定的论域, $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$ 为一给定的语言标度, $\bar{S} = \{s_{(\theta)} | \theta \in [0, k-1]\}$ 为其拓展连续标度, 其中 k 为奇数, 则称

$$\tilde{A} = \{ \langle x, \tilde{s}_{\theta(x)}, h_{\tilde{A}}(x)g_{\tilde{A}}(x) \rangle | x \in X \} \quad (3)$$

为定义在 X 上的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言

集. 其中: $\tilde{S}_{\theta(x)} = [S_{\theta^L(x)}, S_{\theta^U(x)}]$ 为不确定语言变量; $\tilde{h}_{\tilde{A}}(x) : x \rightarrow [0, 1]$ 和 $\tilde{g}_{\tilde{A}}(x) : x \rightarrow [0, 1]$ 分别为 x 隶属于和非隶属于不确定语言变量 $\tilde{S}_{\theta(x)}$ 的程度, 并且满足对于 $\forall x \in X$, 均有

$$0 \leq \sup(\tilde{h}_{\tilde{A}}(x)) + \sup(\tilde{g}_{\tilde{A}}(x)) \leq 1.$$

为了方便起见, 称 $\tilde{a} = t(\tilde{s}_{\theta(x)}, h_{\tilde{A}}(x), g_{\tilde{A}}(x))$ 为毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量.

受文献[10, 22]的启发, 定义得分函数 $S(\tilde{a})$, 并且给出比较规则如下.

定义4 设 $\tilde{a} = \langle \tilde{s}_{\theta(\tilde{a})}, h, g \rangle$ 为任意 PHFUL, 有

$$S(\tilde{a}) = \left[s_{\theta^L(\tilde{a})} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\#h} \left(\sum_{\gamma \in h} \gamma^2 \right) \right) - \frac{1}{\#g} \left(\sum_{\eta \in g} \eta^2 \right), s_{\theta^U(\tilde{a})} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\#h} \left(\sum_{\gamma \in h} \gamma^2 \right) \right) - \frac{1}{\#g} \left(\sum_{\eta \in g} \eta^2 \right) \right], \quad (4)$$

其中 $\#h, \#g$ 分别为集合中元素的个数.

可知得分函数的表示形式为不确定语言形式, 所以得分函数的运算仍满足不确定语言变量的运算法则^[21], 限于篇幅, 不再赘述.

定义5^[21] 设 $\tilde{s}_1 = [s_{\alpha_1}, s_{\beta_1}]$, $\tilde{s}_2 = [s_{\alpha_2}, s_{\beta_2}]$ 为两个不确定语言变量, 令 $\text{len}(\tilde{s}_1) = \beta_1 - \alpha_1$, $\text{len}(\tilde{s}_2) = \beta_2 - \alpha_2$, 有

$$p(\tilde{s}_1 \geq \tilde{s}_2) = \frac{\max(0, \text{len}(\tilde{s}_1) + \text{len}(\tilde{s}_2) - \max(\beta_2 - \alpha_1, 0))}{\text{len}(\tilde{s}_1) + \text{len}(\tilde{s}_2)}. \quad (5)$$

当 $p(\tilde{s}_1 \geq \tilde{s}_2) > 0.5$ 时, $s(\tilde{a}_1) > s(\tilde{a}_2)$; 当 $p(\tilde{S}_1 \geq \tilde{S}_2) < 0.5$ 时, $S(\tilde{a}_1) < s(\tilde{a}_2)$.

受文献[21, 23]的启发, 定义距离测度如下.

定义6 设 $\tilde{a}_1 = \{s_{\theta(\tilde{a}_1)}, h(\tilde{a}_1), g(\tilde{a}_1)\}$, $\tilde{a}_2 = \{s_{\theta(\tilde{a}_2)}, h(\tilde{a}_2), g(\tilde{a}_2)\}$ 为任意两个 PHFUL, 则 \tilde{a}_1 与 \tilde{a}_2 之间的 Hamming 距离定义为

$$d(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \frac{1}{2(k-1)} \left| \frac{\theta^L(a_1) + \theta^R(a_1)}{2} \left(1 + \frac{1}{l_{h_1}} \sum_{\gamma_1 \in h_1} \gamma_1^2 - \frac{1}{l_{g_1}} \sum_{\eta_1 \in g_1} \eta_1^2 \right) - \frac{\theta^L(a_2) + \theta^R(a_2)}{2} \left(1 + \frac{1}{l_{h_2}} \sum_{\gamma_2 \in h_2} \gamma_2^2 - \frac{1}{l_{g_2}} \sum_{\eta_2 \in g_2} \eta_2^2 \right) \right|. \quad (6)$$

其中: $l_{h_1}, l_{h_2}, l_{g_1}, l_{g_2}$ 分别为 \tilde{a}_1 和 \tilde{a}_2 中隶属度函数和非隶属度函数的元素个数, k 为语言术语集所包含的语言术语个数.

1.2 前景理论

1979年, Kahneman等^[14]提出的前景理论认为在进行不确定决策过程中, 决策结果与决策者的主观偏

好有关,是行为决策领域的标志性理论.与前景价值有关的价值函数和权重函数分别为

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0; \\ -\theta(-x)^\beta, & x < 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$w(p) = \begin{cases} \frac{p^\gamma}{[p^\gamma + (1-p)^\lambda]^{1/\lambda}}, & x \geq 0; \\ \frac{p^\delta}{[p^\delta + (1-p)^\delta]^{1/\delta}}, & x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

其中: α 、 β 为相较于决策参考点为收益或损失时决策者的风险敏感程度系数,反映到函数图像中即价值函数图像在收益和损失部分的凹凸程度; λ 为损失规避程度系数; γ 、 δ 分别为心理预期为收益或者损失时的风险态度系数.参数取值^[24]分别为: $\lambda = 2.25, \alpha = \beta = 0.88, \gamma = 0.61, \delta = 0.69$.

2 决策方法

2.1 问题描述

对于基于前景理论的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言 ELECTRE 多属性决策问题,设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 是一组离散的备选方案,有 n 个评价属性 $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$. 评价指标权重向量为 $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, ω_j 为第 j 个评价属性 G_j 的属性权重, $j \in N$, 满足 $0 < \omega_j < 1$ 且 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$, 假定各评价指标属性权重已知且均为实数. 决策矩阵为 $C = |c_{ij}|_{m \times n}$, c_{ij} 为对于评价指标 G_j 方案 A_i 的指标值或准则值,各指标的评价信息均以毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量的形式由决策者给出, $i \in M, j \in N$.

2.2 基于前景理论的决策信息的转化

期望值参考点设计如下:在前景理论中,因为没有固定的参考点,多数文献均选取0点、决策者对各属性的期望值和正负理想解等作为决策参考点,为了能同时体现出决策者在期望收益或损失时的不同风险态度,本文选取不同方案属性值排序的中间值作为决策者参考点.

定义7 毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量决策矩阵为 $C = |c_{ij}|_{m \times n}$, 定义决策者的收益损失决策矩阵 $D(d_{ij}) = |d_{ij}|_{m \times n}$, 有

$$d_{ij} = \begin{cases} d(c_{ij}, e_{ij}), & c_{ij} \geq e_{ij}; \\ -d(c_{ij}, e_{ij}), & c_{ij} < e_{ij}. \end{cases} \quad (9)$$

其中 e_{ij} 为决策者的期望值参考点(选取属性 c_j 下不同方案得分函数排序后的中间值), $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

为了考虑决策者在对待损失和收益时的不同态度,需要基于前景理论建立决策者针对每一个备选

方案对应每一个指标下的前景值,即将决策者面对风险的心理特征加入到评价中,建立前景决策矩阵 $V(v_{ij}) = |v_{ij}|_{m \times n}$, 有

$$v_{ij} = \begin{cases} d_{ij}^\alpha, & d_{ij} \geq 0; \\ -\theta(-d_{ij})^\beta, & d_{ij} < 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$w(p_j) = \begin{cases} \frac{p_j^\gamma}{[p_j^\gamma + (1-p_j)^\gamma]^{1/\gamma}}, & d_{ij} \geq 0; \\ \frac{p_j^\delta}{[p_j^\delta + (1-p_j)^\delta]^{1/\delta}}, & d_{ij} < 0. \end{cases} \quad (11)$$

其中: p_j 为专家给出的属性 c_j 的权重, $w(p_j)$ 为经过转化后的属性 c_j 的心理权重.

2.3 前景理论下的 PHFUL ELECTRE 方法

在获得决策信息后,采用前景理论求得决策损益矩阵,评价前景决策矩阵并对其进行加权处理得到加权前景决策矩阵.为了便于进一步处理数据,将上述所得的加权前景决策矩阵由式(10)和(11)进行规范化处理,进而得到规范化前景决策矩阵 $V''(v''_{ij}) = |v''_{ij}|_{m \times n}$ 作为最终的决策矩阵,有

$$v''_{ij} = v'_{ij} / \max |v'_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

其中

$$\max |v'_{ij}| = \max_{j=1,2,\dots,n} |v'_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

通过方案的两两比较确定属性一致集和矛盾集.对于每对方案 k 和 l , 指标集划分成两个不同的子集,其中 A_k 和 A_l 的一致集合由所有偏好 A_k 不劣于 A_l 的准则组成,即

$$R_{kl}^+ = \{j | c_{kj} \geq c_{lj}\}. \quad (13)$$

A_k 、 A_l 的矛盾集合由偏好 A_k 劣于 A_l 的准则组成,即

$$R_{kl}^- = \{j | c_{kj} < c_{lj}\}. \quad (14)$$

在此基础上计算一致矩阵和矛盾矩阵.一致矩阵中的一致性指标等于一致集包含的准则相关权重和与所有准则权重和的比值,反映了在连续决策准则的相对基础上,某个方案相对于另一个竞争方案占优.矛盾矩阵中的矛盾性指标反映了某个方案相对于其他竞争方案的劣势程度.

定义8 假设 A_k 和 A_l 为方案集 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 中的任意两个方案,则定义一致性指标为

$$s_{kl} = \sum_{j \in R_{kl}^+} (w_{kj} + w_{lj}) / \sum_{j=1}^n (w_{kj} + w_{lj}). \quad (15)$$

定义9 假设 A_k 和 A_l 为方案集 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 中的任意两个方案,则矛盾性指标为

$$t_{kl} = \max_{j \in R_{kl}^-} |v_{kj} - v_{lj}| / \max_{j \in J} |v_{kj} - v_{lj}|. \quad (16)$$

由传统 ELECTRE 法^[25](限于篇幅计算过程略)建立综合判定矩阵,以此确定两两方案之间的偏序关系进而求出最优解.但是,在实际应用中,决策者通过综合判定矩阵大多只能获得部分属性优先排序,然后通过单一矩阵确定剩余的偏好关系.这种方法得出的结果不一定是成立的,而且分析过程较为繁琐.为了更加准确科学地得到各方案间的整体排序,结合前景理论对传统的 ELECTRE 方法进行如下改进.

首先,根据传统的 ELECTRE 方法得到一致性指标 s_{kl} 和矛盾性指标 t_{kl} ,并构造一致矩阵 $S = [s_{ij}]_{m \times m}$ 和矛盾矩阵 $T = [t_{ij}]_{m \times m}$,其中平均一致/矛盾性指标 \bar{s}, \bar{t} 分别为

$$\bar{s} = \frac{\sum_{k=1, k \neq l}^m \sum_{l=1, l \neq k}^m s_{kl}}{m \times (m-1)}, \quad (17)$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1, k \neq l}^m \sum_{l=1, l \neq k}^m t_{kl}}{m \times (m-1)}. \quad (18)$$

然后,分别对一致矩阵和矛盾矩阵进行前景转化,参考点分别为 \bar{s} 和 \bar{t} ,得到

$$f'_{kl} = \begin{cases} d(s_{kl}, \bar{s})^\alpha, & s_{kl} \geq \bar{s}; \\ -\theta[-d(s_{kl}, \bar{s})]^\beta, & s_{kl} < \bar{s}. \end{cases} \quad (19)$$

$$\beta'_{kl} = \begin{cases} d(t_{kl}, \bar{t})^\alpha, & t_{kl} \leq \bar{t}; \\ -\theta[d(t_{kl}, \bar{t})]^\beta, & t_{kl} > \bar{t}. \end{cases} \quad (20)$$

其中: $d(s_{kl}, \bar{s}) = |s_{kl} - \bar{s}|, d(t_{kl}, \bar{t}) = |t_{kl} - \bar{t}|$.从而得到前景优势判定矩阵 $F' = [f'_{kl}]_{n \times m}$ 和前景劣势判定矩阵 $G' = [\beta'_{kl}]_{m \times m}$,之后分别对两个矩阵各行的元素求和,得到各方案相对于其他方案的总优势值

$$f'_k = \sum_{l=1}^m f'_{kl}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

和总劣势值

$$\beta'_k = \sum_{l=1}^m \beta'_{kl}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (22)$$

进而得到各方案的总判定值

$$\mu'_k = f'_k - \beta'_k. \quad (23)$$

根据总判定值来确定各方案间的整体排序.

2.4 决策步骤

step 1: 针对提出的多属性决策问题,决策者以毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量的形式对方案 A_i 对应的指标 G_j 进行评价赋值 c_{ij} ,根据所给出的决策信息构造决策矩阵 $C = [c_{ij}]_{m \times n}$,并给出各属性值的属性权重.

step 2: 针对决策矩阵 $C = [c_{ij}]_{m \times n}$,由式(4)分别

计算每个指标值的得分函数 $s(c_{ij})$,通过式(5)对不同属性 G_j 下各方案的得分函数进行比较排序以确定每个属性 G_j 下不同方案得分函数的中间值作为决策参考点 e_{ij} ,进而确定期望矩阵 $E = [e_{ij}]_{l \times n}$.

step 3: 由式(6)和(9)建立决策者的收益损失矩阵 $D = [d_{ij}]$.

step 4: 由式(10)建立前景决策矩阵 $V(v_{ij}) = [v_{ij}]_{m \times n}$,根据式(11)将原始权重信息 p^j 转化为心理权重,进而求出加权前景决策矩阵 $V' = [v'_{ij}]_{m \times n}$.并根据式(12)和(13)对其进行规范化处理,得到规范化的加权前景决策矩阵 $V''(v''_{ij}) = [v''_{ij}]_{m \times n}$.

step 5: 由式(14)和(15)计算属性的一致集和矛盾集.

step 6: 由式(16)和(17)计算一致矩阵和矛盾矩阵.

step 7: 由式(18)和(19)分别计算平均一致/矛盾性指标作为决策参考点,并根据式(20)和(21)构建前景优/劣势判定矩阵.

step 8: 由式(22)和(23)分别求出各方案的总优/劣势值,并由式(24)得到各方案的总判定值,据此对各方案进行排序.

3 算例分析

假设一家投资公司计划选择一个最好的投资项目,有5个公司的项目可供选择: A_1 为汽车公司、 A_2 为食品公司、 A_3 为地产公司、 A_4 为日化公司、 A_5 为金融公司.选取4个属性进行评估: G_1 为经济效益、 G_2 为社会效益、 G_3 为风险承受能力、 G_4 为发展潜力.其语言短语评价集 $S = \{s_0: \text{极差}; s_1: \text{非常差}; s_2: \text{差}; s_3: \text{较差}; s_4: \text{一般}; s_5: \text{较好}; s_6: \text{好}; s_7: \text{非常好}; s_8: \text{极好}\}$.由于实际决策环境的复杂程度越来越高,为了更加准确地描述决策信息的不确定性,评价值以毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量的形式由决策者给出.

step 1: 根据所给出的决策信息构造决策矩阵 $C = [c_{ij}]_{m \times n}$,见表1.其中该公司决策专家组给出的各属性的相应权重为(0.35, 0.15, 0.20, 0.30).

step 2: 由式(4)分别计算每个指标值 c_{ij} 的得分函数 $s(c_{ij})$,并由式(5)对得分函数进行比较排序(比较计算过程省略),选取中间值作为参考点,见表2.由表2可得

$$E = [e_{ij}]_{l \times n} = \left[\left\langle \begin{matrix} [S_3, S_4] \\ \{0.6, 0.7\}, \{0.1, 0.2, 0.3\} \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \leftarrow \left\langle \begin{matrix} [S_3, S_4] \\ \{0.4, 0.5\}, \{0.3, 0.4\} \end{matrix} \right\rangle \right]$$

表1 决策者给出的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言信息的决策矩阵

| | G_1 | G_2 | G_3 | G_4 |
|-------|--|--|--|--|
| A_1 | $\left\langle \begin{matrix} [S_4, S_6] \\ \{0.4, 0.5\}, \{0.6, 0.7, 0.8\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_4, S_5] \\ \{0.4, 0.5\}, \{0.3, 0.4\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_6, S_7] \\ \{0.2, 0.3, 0.4\}, \{0.6, 0.7\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_2, S_4] \\ \{0.4, 0.5\}, \{0.5, 0.6\} \end{matrix} \right\rangle$ |
| A_2 | $\left\langle \begin{matrix} [S_3, S_4] \\ \{0.6, 0.7\}, \{0.4, 0.5\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_3, S_4] \\ \{0.4, 0.5\}, \{0.3, 0.4\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_6, S_8] \\ \{0.2, 0.3\}, \{0.6, 0.7, 0.8\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_2, S_3] \\ \{0.5, 0.6\}, \{0.4, 0.5\} \end{matrix} \right\rangle$ |
| A_3 | $\left\langle \begin{matrix} [S_6, S_8] \\ \{0.5, 0.6, 0.7\}, \{0.2, 0.3\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_2, S_3] \\ \{0.2, 0.3\}, \{0.7, 0.8\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_2, S_4] \\ \{0.2, 0.3, 0.4\}, \{0.2, 0.3\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_4, S_5] \\ \{0.4, 0.5\}, \{0.5, 0.6, 0.7\} \end{matrix} \right\rangle$ |
| A_4 | $\left\langle \begin{matrix} [S_3, S_4] \\ \{0.6, 0.7\}, \{0.1, 0.2, 0.3\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_3, S_4] \\ \{0.6, 0.7, 0.8\}, \{0.4, 0.5\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_6, S_7] \\ \{0.2, 0.3\}, \{0.6, 0.7, 0.8\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_2, S_4] \\ \{0.5, 0.6\}, \{0.6, 0.7\} \end{matrix} \right\rangle$ |
| A_5 | $\left\langle \begin{matrix} [S_6, S_7] \\ \{0.6, 0.7\}, \{0.2, 0.3\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_4, S_5] \\ \{0.2, 0.3\}, \{0.5, 0.6\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_1, S_3] \\ \{0.4, 0.5, 0.6\}, \{0.1, 0.2\} \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} [S_7, S_8] \\ \{0.4, 0.5\}, \{0.7, 0.8\} \end{matrix} \right\rangle$ |

表2 得分函数比较矩阵

| $s(c_{ij})$ | G_1 | G_2 | G_3 | G_4 |
|-------------|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| A_1 | $[S_{1.147}, S_{2.125}]$ | $[S_{2.16}, S_{2.7}]$ | $[S_{2.015}, S_{2.687}]$ | $[S_{0.9}, S_{1.8}]$ |
| A_2 | $[S_{1.83}, S_{2.44}]$ | $[S_{1.62}, S_{2.16}]$ | $[S_{1.705}, S_{2.274}]$ | $[S_{1.1}, S_{1.65}]$ |
| A_3 | $[S_{3.905}, S_{5.207}]$ | $[S_{0.5}, S_{0.75}]$ | $[S_{0.892}, S_{1.783}]$ | $[S_{1.677}, S_{2.096}]$ |
| A_4 | $[S_{2.067}, S_{2.756}]$ | $[S_{1.937}, S_{2.583}]$ | $[S_{1.705}, S_{1.989}]$ | $[S_{0.88}, S_{1.76}]$ |
| A_5 | $[S_{4.08}, S_{4.76}]$ | $[S_{1.52}, S_{1.9}]$ | $[S_{0.616}, S_{1.848}]$ | $[S_{2.24}, S_{2.56}]$ |
| 排序 | $A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$ | | | |
| 参考点 | A_4 | A_2 | A_4 | A_2 |

$$\left\langle \begin{matrix} [S_6, S_7] \\ \{\{0.2, 0.3\}, \{0.6, 0.7, 0.8\}\} \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left\langle \begin{matrix} [S_2, S_3] \\ \{\{0.5, 0.6\}, \{0.4, 0.5\}\} \end{matrix} \right\rangle$$

step 3: 由式(6)和(9)建立收益损失矩阵

$$D = [d_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.080156 & 0.067500 & 0.041979 & -0.003125 \\ -0.034635 & 0 & 0.01760 & 0 \\ 0.267969 & -0.158125 & -0.063698 & 0.063906 \\ 0 & 0.046302 & 0 & -0.006875 \\ 0.250989 & -0.022500 & -0.076927 & 0.128125 \end{bmatrix}$$

step 4: 由式(10)建立前景决策矩阵

$$V(v_{ij}) = [v_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} -0.244144 & 0.093280 & 0.061414 & -0.014049 \\ -0.116669 & 0 & 0.028808 & 0 \\ 0.313844 & -0.443918 & -0.199440 & 0.200013 \\ 0 & 0.066946 & 0 & -0.028118 \\ 0.296276 & -0.079818 & -0.235468 & 0.163952 \end{bmatrix}$$

表3 各方案的权重转化矩阵

| | G_1 | G_2 | G_3 | G_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| A_1 | 0.360 | 0.227 | 0.261 | 0.328 |
| A_2 | 0.360 | 0.227 | 0.261 | 0.318 |
| A_3 | 0.345 | 0.217 | 0.257 | 0.318 |
| A_4 | 0.345 | 0.227 | 0.261 | 0.328 |
| A_5 | 0.345 | 0.217 | 0.257 | 0.318 |

计算加权前景决策矩阵 $V'(v'_{ij}) = [v'_{ij}]_{m \times n}$, 由式(11)将原始权重转化为决策者的心理权重, 结果见表3.

通过前景决策矩阵每列与相应的权重乘积计算可得

$$V' = \begin{bmatrix} -0.0879 & 0.0212 & 0.0160 & -0.0046 \\ -0.0420 & 0.0000 & 0.0075 & 0.0000 \\ 0.1083 & -0.0963 & -0.0513 & 0.0636 \\ 0.0000 & 0.0152 & 0.0000 & -0.0092 \\ 0.1022 & -0.0173 & -0.0605 & 0.0521 \end{bmatrix}$$

由式(12)和(13)进行规范化处理, 从而得到最终的标准决策矩阵 $V''(v''_{ij}) = [v''_{ij}]_{m \times n}$, 有

$$V'' = \begin{bmatrix} -0.812 & 0.196 & 0.148 & -0.042 \\ -0.388 & 0.000 & 0.069 & 0.000 \\ 1.000 & -0.889 & -0.474 & 0.587 \\ 0.000 & 0.140 & 0.000 & -0.085 \\ 0.944 & -0.160 & -0.559 & 0.481 \end{bmatrix}$$

step 5: 由式(14)和(15)计算属性的一致集和矛盾集

$$\begin{aligned} R_{12}^+ &= \{2, 3\}, R_{12}^- = \{1, 4\}; R_{13}^+ = \{2, 3\}, R_{13}^- = \{1, 4\}; \\ R_{14}^+ &= \{2, 3, 4\}, R_{14}^- = \{1\}; R_{15}^+ = \{2, 3\}, R_{15}^- = \{1, 4\}; \\ R_{21}^+ &= \{1, 4\}, R_{21}^- = \{2, 3\}; x_{23}^+ = \{2, 3\}, R_{23}^- = \{1, 4\}; \\ R_{24}^+ &= \{3, 4\}, R_{24}^- = \{1, 2\}; R_{25}^+ = \{2, 3\}, R_{25}^- = \{1, 4\}; \\ R_{31}^+ &= \{1, 4\}, R_{31}^- = \{2, 3\}; R_{32}^+ = \{1, 4\}, R_{32}^- = \{2, 3\}; \\ R_{34}^+ &= \{1, 4\}, R_{34}^- = \{2, 3\}; R_{35}^+ = \{1, 3, 4\}, R_{35}^- = \{2\}; \\ R_{41}^+ &= \{1\}, R_{41}^- = \{2, 3, 4\}; R_{42}^+ = \{1, 2\}, R_{42}^- = \{3, 4\}; \end{aligned}$$

$$R_{43}^+ = \{2, 3\}, R_{43}^- = \{1, 4\}; R_{45}^+ = \{2, 3\}, R_{45}^- = \{1, 4\};$$

$$R_{51}^+ = \{1, 4\}, R_{51}^- = \{2, 3\}; R_{52}^+ = \{1, 4\}, R_{52}^- = \{2, 3\};$$

$$R_{33}^+ = \{2\}, R_{53}^- = \{1, 3, 4\}; R_{54}^+ = \{1, 4\}, R_{54}^- = \{2, 3\}.$$

step 6: 由式(16)和(17)计算属性的一致矩阵和矛盾矩阵

$$S = \begin{bmatrix} - & 0.4167 & 0.4159 & 0.6983 & 0.4167 \\ 0.5833 & - & 0.4177 & 0.5015 & 0.5011 \\ 0.5841 & 0.5823 & - & 0.5770 & 0.8091 \\ 0.3017 & 0.4985 & 0.4230 & - & 0.4186 \\ 0.5833 & 0.4989 & 0.1909 & 0.5841 & - \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.462 & - & 1 & 1 & 1 \\ 0.599 & 0.640 & - & 1 & 1 \\ 0.182 & 0.219 & 0.972 & - & 1 \\ 0.403 & 0.477 & 0.145 & 0.592 & - \end{bmatrix}.$$

step 7: 由式(18)~(21)构建前景优/劣势判定矩阵

$$F' = \begin{bmatrix} - & -0.2526 & -0.2547 & 0.2408 & -0.2526 \\ 0.1122 & - & -0.2499 & 0.0033 & 0.0025 \\ 0.1132 & 0.111 & - & 0.1047 & 0.3559 \\ -0.5417 & -0.0074 & -0.2357 & - & -0.2475 \\ 0.1122 & -0.0056 & 0.1909 & -0.8007 & - \end{bmatrix},$$

$$G' = \begin{bmatrix} - & 0.7016 & 0.7016 & 0.7016 & 0.7016 \\ -0.3180 & - & 0.7016 & 0.7016 & 0.7016 \\ -0.1717 & -0.1248 & - & 0.7016 & 0.7016 \\ -0.5928 & -0.5577 & -0.6362 & - & 0.7016 \\ -0.3780 & -0.3087 & -0.6276 & -0.1795 & - \end{bmatrix}.$$

step 8: 由式(22)和(23)计算各方案的总优/劣值

$$f'_1 = -0.5191, f'_2 = -0.1319, f'_3 = 0.6849,$$

$$f'_4 = -1.0323, f'_5 = -0.5032;$$

$$\beta'_1 = 2.8064, \beta'_2 = 1.7868, \beta'_3 = 1.3563,$$

$$\beta'_4 = -1.0851, \beta'_5 = -0.7378.$$

由式(24)计算各方案的总判定值

$$\mu'_1 = -3.3255, \mu'_2 = -1.9187, \mu'_3 = -0.6714,$$

$$\mu'_4 = 0.0528, \mu'_5 = 0.2346.$$

根据总判定值得出各方案的整体排序为 $A_5 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1$, 最优方案为 A_5 .

为了验证本文所提出方法的有效性和优越性, 分别用传统 ELECTRE 法和综合前景值方法^[17] 对此模

糊多属性决策问题求解(限于篇幅, 计算过程省略), 各方案的综合前景值见表4.

表4 各方案的综合前景值

| 综合前景值 | 方案 | | | | |
|----------|--------|--------|-------|-------|-------|
| | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | A_5 |
| $V(A_i)$ | -0.055 | -0.035 | 0.024 | 0.006 | 0.706 |

传统 ELECTRE 法通过构造综合判定矩阵整理得出如下结果

$$\left. \begin{matrix} A_5 \succ A_4 \\ A_3 \succ A_2 \end{matrix} \right\} \succ A_1.$$

根据结果只能剔除方案 A_1, A_2, A_4 , 但无法确定最优方案, 并且只能得到部分方案之间的优先排序. 由综合前景值方法可得, $A_5 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1$, 最优方案仍为 A_5 . 两种方法得出的优劣排序不完全相同, 原因在于后者只是单纯地对备选方案进行比较, 没有考虑到各方案之间存在的偏好关系. 本文所提出的基于前景理论下的 PHFUL ELECTRE 法既避免了因在传统 ELECTRE 法阈值选取过程中出现的不确定性等问题而造成的部分决策结果缺失, 又在加入决策者心理行为的前提下考虑到了各个备选方案之间存在的相互关系, 因此得到的决策结果更具有合理性, 更加符合实际决策情境.

4 结论

本文在前人研究的基础上创新了对象和方法. 首先提出了新的模糊多属性决策信息表达形式——毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言变量; 然后构建了基于前景理论的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言 ELECTRE 的多属性决策模型. 该方法利用前景理论同时对决策信息和多属性方法进行结合, 充分地考虑了决策者在面对收益和损失时的风险态度, 更加符合真实的决策情境. 传统 ELECTRE 法因在阈值选取阶段的各种不确定性, 容易导致决策信息失真, 从而影响最终的排序结果分析. 本文方法通过引入前景理论对其进行改进解决了上述问题, 使得决策结果更加科学合理. 下一步将针对毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言环境下权重部分已知以及全部未知的群决策问题构建相应的模糊多属性决策模型.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-356.

[2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

- [4] Yager R R. Pythagorean fuzzy subsets[C]. Proceedings of the Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting. Edmonton: IEEE, 2013: 57-61.
- [5] Zhang Zhiming. Hesitant fuzzy power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Information Sciences, 2013, 234(10): 150-181.
- [6] 刘卫锋, 何霞. 毕达哥拉斯犹豫模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(4): 107-115.
(Liu W F, He X. Pythagorean hesitant fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30(4): 107-115.)
- [7] 刘卫锋, 何霞, 常娟. 毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关测度[J]. 控制与决策, 2019, 34(5): 1018-1024.
(Liu W F, He X, Chang J. Correlation measures of pythagorean hesitant fuzzy set[J]. Control and Decision, 2019, 34(5): 1018-1024.)
- [8] Khan M S A, Abdullah S, Ali A, et al. An extension of VIKOR method for multi-attribute decision-making under Pythagorean hesitant fuzzy setting[J]. Granular Computing, 2019, 4(3): 421-434.
- [9] Ali K M S, Saleem A, Asad A, et al. Hybrid aggregation operators based on Pythagorean hesitant fuzzy sets and their application to group decision making[J]. Granular Computing, 2019, 4(3): 469-482.
- [10] Wu S J, Wei G W. Pythagorean fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 97(3): 24-39.
- [11] Blavatsky P R. A theory decision-making under risk as a tradeoff between expected utility, expected utility deviation and expected utility skewness[J]. Social Science Electronic Publishing, 1994, 116(1): 46.
- [12] Xu Zeshui. Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making[J]. Information Fusion, 2006, 7(2): 231-238.
- [13] Li Dengfeng. Multiattribute group decision making method using extended linguistic variables[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2009, 17(6): 793-806.
- [14] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-291.
- [15] 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊 TOPSIS 多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 864-870.
(Wang Y M, Que C P, Lan Y X. Hesitant fuzzy TOPSIS multi-attribute decision method based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2017, 32(5): 864-870.)
- [16] 刘培德. 一种基于前景理论的不确定语言变量风险型多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2011, 26(6): 893-897.
(Liu P D. Method for multi-attribute decision-making under risk with the uncertain linguistic variables based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2011, 26(6): 893-897.)
- [17] 徐海军, 田晓丽, 徐泽水. 基于犹豫模糊语言信息的前景决策方法[J]. 中国管理科学, 2018, 26(8): 179-185.
(Xu H J, Tian X L, Xu Z S. Prospect decision-making method based on hesitant fuzzy linguistic information[J]. Chinese Journal of Management Science, 2018, 26(8): 179-185.)
- [18] 施明华, 肖庆宪. 基于前景理论的犹豫模糊语言绿色供应商优选决策[J]. 统计与决策, 2018, 34(21): 46-50.
(Shi M H, Xiao Q X. Optimal decision-making for hesitant fuzzy linguistic green supplier based on prospect theory[J]. Statistics and Decision, 2018, 34(21): 46-50.)
- [19] Almeida A T. Multicriteria modelling of repair contract based on utility and ELECTRE I method with dependability and service quality criteria[J]. Annals of Operations Research, 2005, 138(1): 113-126.
- [20] 王坚强, 李寒波. 基于直觉语言集结算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1571-1574.
(Wang J Q, Li H B. Multi-criteria decision-making method based on aggregation operators for intuitionistic linguistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1571-1574.)
- [21] Xu Z. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment[J]. Information Sciences, 2004, 168(1/2/3/4): 171-184.
- [22] Lu M, Wei G W. Pythagorean uncertain linguistic aggregation operators for multiple attribute decision making[J]. International Journal of Knowledge-Based and Intelligent Engineering Systems, 2017, 21(3): 165-179.
- [23] 王金山, 杨宗华. 基于 Power 几何算子的对偶犹豫不确定语言多属性决策方法[J]. 模糊系统与数学, 2017, 31(6): 32-38.
(Wang J S, Yang Z H. Dual hesitant uncertain linguistic variables multi-attribute decision making method based on power geometric operators[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2017, 31(6): 32-38.)
- [24] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. Journal of Risk & Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323.
- [25] Lucien Duckstein. Multicriterion analysis of a vegetation management problem using ELECTRE II[J]. Applied Mathematical Modelling, 1983, 7(4): 254-261.

作者简介

赵晓冬(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 从事模糊决策等研究, E-mail: xdzhaod@ysu.edu.cn;

王飞(1994—), 男, 博士生, 从事模糊决策的研究, E-mail: 1021647174@qq.com;

张妮(1989—), 女, 博士生, 从事模糊决策的研究, E-mail: 297250551@qq.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)