基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策方法

朱峰，徐济超，刘玉敏，孙静静

引用本文:
朱峰, 徐济超, 刘玉敏, 等. 基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(8): 1977-1986.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1432

文章编号: 1001-0920(2020)08-1977-10 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2018.1432

基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策方法

朱 峰[1,2], 徐济超[1], 刘玉敏[2†], 孙静静[2]

(1. 郑州大学 管理工程学院，郑州 450001；2.郑州大学 商学院，郑州 450001)

摘 要: 针对概率犹豫模糊环境下属性权重完全未知的多属性决策问题,提出基于符号距离和交叉熵的多属性决策方法. 首先,定义用于测量决策者犹豫程度的3种概率犹豫模糊元的犹豫度: 数值犹豫度,信息不完全度和总犹豫度,基于3种犹豫度提出概率犹豫模糊符号距离;然后,为了避免人为添加元素,定义调和概率犹豫模糊元,并结合信息不完全度提出概率犹豫模糊元的交叉熵;最后,根据概率犹豫模糊元的符号距离和交叉熵构建多属性决策模型,并通过算例验证了该模型的有效性和合理性.

关键词: 多属性决策；概率犹豫模糊元；犹豫度；符号距离；交叉熵；信息不完全度；调和概率犹豫模糊元

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute decision method based on signed distance and cross entropy

ZHU Feng[1,2], *XU Ji-chao*[1], *LIU Yu-min*[2†], *SUN Jing-jing*[2]

(1. School of Management Engineering，Zhengzhou University，Zhengzhou 450001，China；2. Business of School，Zhengzhou University，Zhengzhou 450001，China)

Abstract: A multi-attribute decision making method based on signed distance and cross entropy is proposed for multi-attribute decision making problems in which the attribute weights are completely unknown under the probabilistic hesitant fuzzy environment. Firstly, the three kinds hesitation degree of probability hesitant fuzzy elements used to measure the degree of hesitancy of decision makers is proposed: Numerical hesitation degree, information incomplete degree and total hesitation degree. The probability hesitant fuzzy signed distance is proposed based on three hesitation degrees. Then, in order to avoid artificially adding elements, the adjusted probabilistic hesitant fuzzy element is defined, it combines with the incomplete degree of information to propose the cross entropy of the probabilistic hesitant fuzzy element. Finally, the multi-attribute decision model is constructed based on the signed distance and cross entropy of the probabilistic hesitant fuzzy element, and the effectiveness and rationality of the model are illustrated by an example.

Keywords: multi-attribute decision-making；probabilistic hesitant fuzzy element；hesitation degree；signed distance；cross entropy；information incomplete degree；adjusted probabilistic hesitant fuzzy element

0 引 言

在经济管理决策问题中,由于人们对同一问题往往会产生不同的看法,并且常常难以达成一致, Torra等[1-2]提出了犹豫模糊集. 近年来,犹豫模糊集已经引起了国内外学者的广泛关注[3-10]. 犹豫模糊集允许一个元素属于某个集合的隶属度可以是多个不同的值,但却将每一个隶属度发生的概率看作是相同的. 例如,当一位专家对某部电影的视觉效果进行评估时,由于缺乏其他相关信息,会使得该专家对于电影视觉效果的判断在0.7和0.8之间犹豫不决. 因而,该电影的视觉效果的评估结果可用犹豫模糊元$\{0.7, 0.8\}$表示;同时,该专家认为0.7比0.8发生的可能性更大. 显然仅用犹豫模糊集无法表达专家的这种偏好.

为了有效地考虑每一个隶属度发生的概率,朱斌[11]首先提出了概率犹豫模糊集. 根据本文提出的电影视觉效果评估例子,可得到一个概率犹豫模糊元$\{0.7(0.6), 0.8(0.4)\}$,其中0.6和0.4分别表示评估结果0.7和0.8发生的概率. 然而,在实际的多属性决策中,由于专家的现有知识无法提供完整的决策信息,会导致部分未知信息的存在,从而使得概率犹豫模糊元会出现某些缺失值,使得其概率之和小于1. 如专家认为0.7发生的概率为0.6,而0.8发生的概率为0.3. 为了反映专家的这种决策偏好,Zhang等[12]对概率犹豫

收稿日期: 2018-10-21；**修回日期:** 2019-05-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71672182, 71711540309, U1604262).

†通讯作者. E-mail: zzyuminliu@126.com.

模糊集进行了改进,提出了能够包含不完全信息的改进概率犹豫模糊集. 与犹豫模糊集和概率犹豫模糊集相比,改进的概率犹豫模糊集包含了更多的不确定信息,不仅给出了每一个隶属度发生的概率,同时考虑到了概率信息的不完整,充分表达了专家在多属性决策中所给出评价结果的概率的不完全性. 因此,改进的概率犹豫模糊集更全面地刻画了专家的不确定性决策信息. 概率犹豫模糊集的研究引起了越来越多学者的关注. Gao等[13]定义了概率犹豫模糊集的距离测度,并且提出了考虑时间因素的多种动态概率犹豫模糊算子. Li等[14]基于传统的优先级算子提出了概率犹豫模糊优先级算子. Li等[15]提出了概率犹豫模糊元的可能度,并与传统的QUALIFLEX方法结合运用到多属性决策问题中. Ding等[16]基于交互式赋权法提出了一种用于解决属性权重部分未知的概率犹豫模糊多属性决策方法. 刘玉敏等[17]将概率犹豫模糊元的熵测度与TOPSIS方法结合解决多属性决策问题. Hao等[18]对概率犹豫模糊集进行了拓展,提出了概率对偶犹豫模糊集.

符号距离和交叉熵测度是犹豫模糊集的两个重要测度. 符号距离是比较犹豫模糊元大小的一种有效工具,而交叉熵测度主要度量两个犹豫模糊元信息的差异程度. 关于犹豫模糊集的符号距离和交叉熵测度的研究引起了许多学者的注意. 犹豫模糊元包含多个不同的隶属度,体现了决策者的犹豫程度和评价结果的不一致性. 为了测量该犹豫程度, Zhang等[19]基于隶属度之间的差异程度首先提出了犹豫模糊元的数值犹豫度,接着基于犹豫度提出了犹豫模糊符号距离. Li等[20]认为隶属度的个数越多表示决策者的犹豫程度越大,因此提出了考虑隶属度个数的犹豫度,并提出了改进型犹豫模糊元距离测度. 林松等[21]结合数值犹豫度和个数犹豫度提出了新的犹豫模糊元犹豫度,同时提出了改进型犹豫模糊元的符号距离. 阮传扬[22]利用对数函数有效地克服了林松等所提出符号距离对隶属度个数处理不佳的问题,提出了新型犹豫模糊元符号距离. Xu等[23]将模糊集的熵、交叉熵推广到犹豫模糊环境下,定义了犹豫模糊集的熵、交叉熵公式,同时讨论了犹豫模糊集的相似度、熵、交叉熵之间的关系,并将其应用到多属性决策中. 刘小弟等[24]将信息论中的相对熵拓展到犹豫模糊集上,依次提出犹豫模糊相对熵和对称交叉熵,并利用对称交叉熵定义一种新的相似度公式. 汪峰等[25]提出了新的犹豫模糊交叉熵和相关系数,并将其成功地应用到模糊聚类问题中.

概率犹豫模糊元包含多个不同的隶属度,且每个隶属度发生的概率不相同,充分地体现了决策者的犹豫程度. 同时,概率犹豫模糊元存在概率之和小于1,表示决策者无法给出完整的评价信息,反映了决策者对某些评价信息犹豫不决. 因此,概率犹豫模糊元的犹豫度比犹豫模糊元更为复杂. 为了测量决策者的犹豫程度,首先,分别提出概率犹豫模糊元的数值犹豫度和信息不完全度,以分别测量概率犹豫模糊元的隶属度差异程度和信息的不完全程度;其次,为了能够测量决策者的整体犹豫程度,提出了概率犹豫模糊元的总犹豫度,并基于犹豫度提出了概率犹豫模糊元的符号距离,用于比较概率犹豫模糊元之间的大小;然后,为了避免人为添加元素和度量概率犹豫模糊元之间的差异程度,提出调和概率犹豫模糊元,并结合信息不完全度提出了概率犹豫模糊交叉熵测度和相关性质;最后,本文将概率犹豫模糊元的符号距离和交叉熵结合运用到属性权重完全未知的多属性决策问题中,并通过具体案例进行了验证分析.

1 预备知识

定义1[12] 设X是给定的一个非空集合,则在X上的一个概率犹豫模糊集(PHFS)H_p定义为

$$H_p = \{\langle x, h(p_x)\rangle | x \in X\}.$$

其中: $h(p_x) = \{\gamma^\lambda(p^\lambda) | \lambda = 1, 2, \ldots, l\}$一般称之为概率犹豫模糊元(PHFE); l代表$h(p_x)$中元素的个数; γ^λ表示集合X中的元素x属于概率犹豫模糊集H_p的隶属度, $\gamma^\lambda \in [0,1]$; p^λ代表隶属度γ^λ的概率,且$p^\lambda \in [0,1]$和$\sum\limits_{\lambda=1}^{l} p^\lambda \leqslant 1$; $h(p_x)$是概率犹豫模糊集H_p的基本元素.

为了简便,记$h(p_x) = h(p)$,而且本文中所有的概率犹豫模糊元$h(p)$中的元素$\gamma^\lambda | p^\lambda$一律按照隶属度$\gamma^\lambda$从小到大排序. 同时, $h(p)$的补集$h^c(p) = \{(1-\gamma^\lambda)(p^\lambda) | \lambda = 1, 2, \ldots, l\}$.

当概率犹豫模糊元的概率满足$\sum\limits_{\lambda=1}^{l} p^\lambda < 1$时,代表存在部分信息的缺失. 为了使概率信息归一化,文献[12]提出了标准概率犹豫模糊元的定义.

定义2[12] 设任意一个概率犹豫模糊元$h(p) = \{\gamma^\lambda(p^\lambda) | \lambda = 1, 2, \ldots, l\}$,则称

$$h(\bar{p}) = \{\gamma^\lambda(\bar{p}^\lambda) | \lambda = 1, 2, \ldots, l\}$$

为$h(p)$的标准概率犹豫模糊元,其中$\bar{p}^\lambda = p^\lambda \Big/ \sum\limits_{\lambda=1}^{l} p^\lambda$.

借鉴统计学中的均值-方差模型,文献[12]提出了一种概率犹豫模糊元排序方法.

定义3[12]　设2个概率犹豫模糊元$h_1(p) = \{\gamma_1^\lambda(p_1^\lambda)|\lambda=1,2,\ldots,l_1\}$和$h_2(p)=\{\gamma_2^\lambda(p_2^\lambda)|\lambda=1,2,\ldots,l_2\}$, $s(h_1(p))$和$s(h_2(p))$分别是$h_1(p)$和$h_2(p)$的得分函数, $\mathrm{var}(h_1(p))$和$\mathrm{var}(h_2(p))$分别是$h_1(p)$和$h_2(p)$的方差函数,则有:

1) 若$s(h_1(p)) > s(h_2(p))$,则$h_1(p) > h_2(p)$.

2) 若$s(h_1(p)) < s(h_2(p))$,则$h_1(p) < h_2(p)$.

3) 若$s(h_1(p)) = s(h_2(p))$,则

$$\begin{cases}\mathrm{var}(h_1(p)) > \mathrm{var}(h_2(p)) \Rightarrow h_1(p) < h_2(p);\\ \mathrm{var}(h_1(p)) = \mathrm{var}(h_2(p)) \Rightarrow h_1(p) \sim h_2(p);\\ \mathrm{var}(h_1(p)) < \mathrm{var}(h_2(p)) \Rightarrow h_1(p) > h_2(p).\end{cases}$$

其中

$$\mathrm{var}(h_i(p)) = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \bar{p}_i^\lambda (s(h_i(p)) - \gamma_i^\lambda)^2,$$

$$s(h_i(p)) = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \bar{p}_i^\lambda \gamma_i^\lambda,\ \bar{p}_i^\lambda = \frac{p_i^\lambda}{\sum_{\lambda=1}^{l_i} p_i^\lambda},\ i=1,2.$$

2　概率犹豫模糊元的犹豫度和符号距离

为了测量决策者或者决策群体意见犹豫不决的程度,本文分别提出概率犹豫模糊元的数值犹豫度、信息不完全度和总犹豫度的表达式及相关性质,然后提出一种用于测量概率犹豫模糊元大小的概率犹豫模糊符号距离.

2.1　概率犹豫模糊元的数值犹豫度

基于犹豫模糊元的数值犹豫度[19],本文认为概率犹豫模糊元应包含多个不同的隶属度,反映了决策者的犹豫程度. 隶属度之间偏差越大,犹豫程度越高. 当各个隶属度对应的概率越接近时,决策者的意见越无法达成一致,其犹豫程度越大. 基于以上两点,本文提出概率犹豫模糊元的数值犹豫度,定义如下.

定义4　对于一个概率犹豫模糊元$h(p) = \{\gamma^\lambda(p^\lambda)|\lambda=1,2,\ldots,l\}$,称

$$H(h(p)) = \begin{cases}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4\bar{p}^i\bar{p}^j f(u^{ij}),\ l>1;\\ 0,\ l=1\end{cases} \tag{1}$$

为$h(p)$的数值犹豫度.其中: $u^{ij} = |\gamma^i - \gamma^j|$, $\bar{p}^i = p^i \Big/ \sum_{\lambda=1}^{l} p^\lambda$, $\bar{p}^j = p^j \Big/ \sum_{\lambda=1}^{l} p^\lambda$. 函数$f:[0,1]\to[0,1]$满足以下3个性质:

1) 当$x\in[0,1]$时, $f(x)$关于x为单调递增函数;

2) $f(x)=1$当且仅当$x=1$;

3) $f(x)=0$当且仅当$x=0$.

性质1　设任意一个概率犹豫模糊元$h(p)$的数值犹豫度为$H(h(p))$,则存在:

1) $H(h(p)) = H(h^c(p))$;

2) $0 \leqslant H(h(p)) \leqslant 1$;

3) $H(h(p))=0$当且仅当$h(p)=\{\gamma(p)\}$.

证明　1)根据定义1中$h(p)$的补集$h^c(p)$可得

$$H(h(p)) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4\bar{p}^i\bar{p}^j f(|\gamma^i-\gamma^j|) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4\bar{p}^i\bar{p}^j f(|1-\gamma^i-1+\gamma^j|) = H(h^c(p)).$$

2) 显而易见.

3) 假设概率犹豫模糊元$h(p)$包含至少两个互不相等的隶属度,当$H(h(p))=0$时,由于$f(x)\in[0,1]$, $4\bar{p}^i\bar{p}^j=0$,存在以下3种情况:

① $4\bar{p}^i\bar{p}^j=0$;

② $f(u^{ij})=0$;

③ $\begin{cases}f(u^{ij})=0,\\ 4\bar{p}^i\bar{p}^j=0.\end{cases}$

根据情况①获得$\begin{cases}\bar{p}^i=1\\ \bar{p}^j=0\end{cases}$或$\begin{cases}\bar{p}^j=1\\ \bar{p}^i=0\end{cases}$,此时概率犹豫模糊元只包含一个隶属度,与假设矛盾;根据情况②和当函数值$f(x)=0$时仅当$x=0$获得$\gamma^i=\gamma^j$,此时概率犹豫模糊元只包含一个隶属度,与假设矛盾;根据情况③可直接获得概率犹豫模糊元只包含一个隶属度,与假设矛盾;因此, $h(p)=\{\gamma(p)\}$. 当$h(p)=\{\gamma(p)\}$时,易得$H(h(p))=0$. 综上所述, $H(h(p))=0$当且仅当$h(p)=\{\gamma(p)\}$. □

通过改变$f(x)$的表达式可以获得许多类型概率犹豫模糊元的犹豫度,如

$$H_1(h(p)) = \begin{cases}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4\bar{p}^i\bar{p}^j u^{ij},\ l>1;\\ 0,\ l=1;\end{cases} \tag{2}$$

$$H_2(h(p)) = \begin{cases}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4\bar{p}^i\bar{p}^j (1-\cos(0.5u^{ij}\pi)),\ l>1;\\ 0,\ l=1;\end{cases} \tag{3}$$

$$H_3(h(p)) = \begin{cases}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i+1}^{l} 4\bar{p}^i\bar{p}^j \sin(0.5u^{ij}\pi),\ l>1;\\ 0,\ l=1.\end{cases} \tag{4}$$

2.2 概率犹豫模糊元的信息不完全度

一个概率犹豫模糊元的信息不完全度是由其包含隶属度的概率之和与1的差异程度所决定. 一般差异程度越大代表决策者给出的信息越不明确,则它的信息不完全度越大. 为此,本文提出概率犹豫模糊元的信息不完全度的定义和相关性质如下.

定义5 设一个概率犹豫模糊元$h(p)=\{\gamma^\lambda(p^\lambda)|\lambda=1,2,\ldots,l\}$,称

$$I(h(p))=g\Big(\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda\Big) \tag{5}$$

为$h(p))$的信息不完全度. 其中函数$g:[0,1]\rightarrow[0,1]$满足以下3个性质:

1) 当$x\in[0,1]$时,$g(x)$关于x为单调递减函数;

2) $g(x)=0$当且仅当$x=1$;

3) $g(x)=1$当且仅当$x=0$.

性质2 设一个概率犹豫模糊元$h(p)$的信息不完全度为$I(h(p))$,则存在:

1) $0\leqslant I(h(p))<1$;

2) $I(h(p))=0$当且仅当$\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda=1$;

3) $I(h(p))=I(h^c(p))$.

性质2的证明过程略.

通过改变$g(x)$的表达式可以获得许多类型概率犹豫模糊元的信息不完全度,如

$$I_1(h(p))=1-\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda, \tag{6}$$

$$I_2(h(p))=\cos\Big(0.5\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda\pi\Big), \tag{7}$$

$$I_3(h(p))=1-\sin\Big(0.5\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda\pi\Big). \tag{8}$$

2.3 概率犹豫模糊元的总犹豫度

由第2.1节和第2.2节可知,数值犹豫度与信息不完全度仅反映了概率犹豫模糊元所包含隶属度的离散程度和信息的不完全程度. 为了全面地考虑决策者或者决策群体的犹豫程度,本文根据定义4和定义5提出概率犹豫模糊元的总犹豫度的表达式以及相关性质.

定义6 设一个概率犹豫模糊元$h(p)$的数值犹豫度和信息不完全度分别为$H(h(p))$和$I(h(p))$,称

$$\mathrm{TH}(h(p))=z(H(h(p)),I(h(p))) \tag{9}$$

为概率犹豫模糊元$h(p)$的总犹豫度. 其中函数$z:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$满足以下3个性质:

1) $z(x,y)=z(y,x)$;

2) $z(x,y)=0$当且仅当$x=y=0$;

3) $z(x,y)$随着x和y的增大而增大.

性质3 设一个概率犹豫模糊元$h(p)$的总犹豫度为$\mathrm{TH}(h(p))$,则存在:

1) $0\leqslant\mathrm{TH}(h(p))\leqslant 1$;

2) $\mathrm{TH}(h(p))=\mathrm{TH}(h^c(p))$;

3) $\mathrm{TH}(h(p))=0$当且仅当$h(p)=\{\gamma(1)\}$.

证明 1) 显而易见.

2) 根据性质1和性质2可得$H(h^c(p))=H(h(p))$和$I(h(p))=I(h^c(p))$,所以$\mathrm{TH}(h(p))=\mathrm{TH}(h^c(p))$.

3) 当$\mathrm{TH}(h(p))=0$时,根据函数$z(x,y)=0$当且仅当$x=y=0$可得$H(h(p))=I(h(p))=0$,再根据$H(h(p))$的定义和$I(h(p))$的性质可得$h(p)=\{\gamma(1)\}$;当$h(p)=\{\gamma(1)\}$时,易得$\mathrm{TH}(h(p))=0$. □

通过改变$z(x,y)$的表达式可以获得许多类型概率犹豫模糊元的总犹豫度,如

$$\mathrm{TH}_1(h(p))=\triangle(h(p)), \tag{10}$$

$$\mathrm{TH}_2(h(p))=\triangle(h(p))\mathrm{e}^{1-\triangle(h(p))}, \tag{11}$$

$$\mathrm{TH}_3(h(p))=\frac{2\triangle(h(p))}{\triangle(h(p))+1}, \tag{12}$$

其中$\triangle(h(p))=\dfrac{1}{2}(H(h(p))+I(h(p)))$.

2.4 概率犹豫模糊元的符号距离

符号距离作为模糊理论中的一种信息测度,主要用于研究模糊数的排序,在模糊决策领域中已得到较广的应用[19,26]. 为了对概率犹豫模糊元进行有效排序,本文首先根据概率犹豫模糊元的总犹豫度和犹豫模糊符号距离[21-22]提出概率犹豫模糊符号距离,然后基于符号距离提出新的概率犹豫模糊元比较法则.

定义7 设一个概率犹豫模糊元$h(p)=\{\gamma^\lambda(p^\lambda)|\lambda=1,2,\ldots,l\}$和理想概率犹豫模糊元$1(\bar p^\lambda)=\{1(\bar p^\lambda)|\lambda=1,2,\ldots,l\}$,其中$\bar p^\lambda=p^\lambda\Big/\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{l}p^\lambda$,称

$$d_s(h(p),1(\bar p))=\frac{1}{2}\Big(\sum_{\lambda=1}^{l}\bar p^\lambda(1-\gamma^\lambda)+\mathrm{TH}(h(p))\Big) \tag{13}$$

为概率犹豫模糊元$h(p)$到$1(\bar p)$的符号距离.

性质4 设1个概率犹豫模糊元为$h(p)$,$1(\bar p)$为理想概率犹豫模糊元,则存在:

1) $0\leqslant d_s(h(p),1(\bar p))\leqslant 1$;

2) $h(p)=1(\bar p)$当且仅当$d_s(h(p),1(\bar p))=0$.

证明 1) 易得

$$0\leqslant\frac{1}{2}\Big(\sum_{\lambda=1}^{l}\bar p^\lambda(1-\gamma^\lambda)+\mathrm{TH}(h(p))\Big)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

所以可得$0 \leqslant d_s(h(p), 1(\bar{p})) \leqslant 1$.

2) 若$h(p) = 1(\bar{p})$,则易得$d_s(h(p), 1(\bar{p})) = 0$;若$d_s(h(p), 1(\bar{p})) = 0$,则可得$\sum_{\lambda}^{l} \bar{p}^{\lambda}(1-\gamma^{\lambda}) = \mathrm{TH}(h(p)) = 0$,计算可得$h(p) = 1(\bar{p})$. □

文献[12]根据概率犹豫模糊元的得分函数和方差函数提出了一种概率犹豫模糊排序方法,但在某些情形下利用该方法对概率犹豫模糊元进行排序时,可能所得结果与直观认识不符.

例1 设3个概率犹豫模糊元分别为$h_1(p) = \{0.4(0.6), 0.5(0.4)\}$, $h_2(p) = \{0.3(0.4), 1(0.1)\}$和$h_3(p) = \{0.4(0.3), 0.5(0.2)\}$.

利用定义3中的方法,可以得到$h_1(p) \sim h_3(p) > h_2(p)$,显然$h_1(p)$和$h_3(p)$ 二者不可能是等价的,这个结果与人们的直观感觉并不一致. 为了克服该缺陷,本文根据概率犹豫模糊符号距离提出一种新的概率犹豫模糊元排序方法.

定义8 设2个概率犹豫模糊元$h_1(p)$和$h_2(p)$, $1(\bar{p})$为理想概率犹豫模糊元,则有:

1) 若$d_s(h_1(p), 1(\bar{p})) > d_s(h_2(p), 1(\bar{p}))$,则$h_1(p) < h_2(p)$;

2) 若$d_s(h_1(p), 1(\bar{p})) = d_s(h_2(p), 1(\bar{p}))$,则$h_1(p) \sim h_2(p)$;

3) 若$d_s(h_1(p), 1(\bar{p})) < d_s(h_2(p), 1(\bar{p}))$,则$h_1(p) > h_2(p)$.

采取本文所提出排序方法对例1中的概率犹豫模糊元进行排序,其中取$\mathrm{TH}_1(h(p)) = (H_1(h(p)) + I_1(h(p)))/2$作为概率犹豫模糊元的总犹豫度的计算公式,最后获得排序结果为$h_1(p) > h_3(p) > h_2(p)$. 显然$h_1(p)$与$h_3(p)$相比所包含的信息更加完整,因此$h_1(p)$优于$h_3(p)$.

产生结果不同的原因在于本文所提出的概率犹豫模糊符号距离是在定义3的基础上又考虑了信息的不完全程度,因此区分度也更高.

3 概率犹豫模糊元的交叉熵测度

为了避免人为主观添加数据和最大限度利用原始数据,本文首先提出调和概率犹豫模糊元的概念,然后结合概率犹豫模糊元的信息不完全度提出用于测量概率犹豫模糊元之间差异程度的概率犹豫模糊元的交叉熵测度,并研究相关性质.

3.1 调和概率犹豫模糊元

在多属性决策方法研究中,针对2个概率犹豫模糊元包含基本元素个数的不一致情况,一种较为有效的方法[13,16]是采取人为添加元素的方式对个数较少的概率犹豫模糊元进行添加,虽然使二者个数保持了一致,但是存在很大的主观性,且可能造成决策结果的不合理性. 为克服此缺陷,本文借鉴Wu等[27]提出的调和概率语言集,提出概率犹豫模糊元的调和概率犹豫模糊元和相关性质.

定义9 设任意两个概率犹豫模糊元$h_1(p) = \{\gamma_1^{\lambda}(p_1^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \ldots, l_1\}$和$h_2(p) = \{\gamma_2^{\lambda}(p_2^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \ldots, l_2\}$,对$h_1(p)$和$h_2(p)$的基本元素进行调节后获得二者的调和概率犹豫模糊元分别为$\tilde{h}_1(p) = \{\tilde{\gamma}_1^{\lambda}(\tilde{p}^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \ldots, L\}$和$\tilde{h}_2(p) = \{\tilde{\gamma}_2^{\lambda}(\tilde{p}^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \ldots, L\}$,且$\tilde{h}_1(p)$和$\tilde{h}_2(p)$ 的概率信息完全相等.

step 1: 对$h_1(p)$和$h_2(p)$进行标准化处理得到$h_1(\bar{p})$和$h_2(\bar{p})$.

step 2: $\tilde{p}^1 = \min\{\bar{p}_1^1, \bar{p}_2^1\}$.

step 3: 若$\tilde{p}^1 = \bar{p}_1^1$,则$\tilde{p}^2 = \min\{\bar{p}_1^2, \bar{p}_2^1 - \tilde{p}^1\}$;若$\tilde{p}^1 = \bar{p}_2^1$,则$\tilde{p}^2 = \min\{\bar{p}_2^2, \bar{p}_1^1 - \tilde{p}^1\}$.

step 4: 若$\tilde{p}^1 = \bar{p}_1^1$和$\tilde{p}^2 = \bar{p}_1^2$,则$\tilde{p}^3 = \min\{\bar{p}_1^3, \bar{p}_2^1 - \tilde{p}^1 - \tilde{p}^2\}$;若$\tilde{p}^1 = \bar{p}_1^1$和$\tilde{p}^2 = \bar{p}_2^1 - \tilde{p}^1$,则$\tilde{p}^3 = \min\{\bar{p}_2^2, \bar{p}_1^2 - \tilde{p}^2\}$;若$\tilde{p}^1 = \bar{p}_2^1$和$\tilde{p}^2 = \bar{p}_2^2$,则$\tilde{p}^3 = \min\{\bar{p}_2^3, \bar{p}_2^2 - \tilde{p}^1 - \tilde{p}^2\}$;若$\tilde{p}^1 = \bar{p}_2^1$和$\tilde{p}^2 = \bar{p}_1^1 - \tilde{p}^1$,则$\tilde{p}^3 = \min\{\bar{p}_1^2, \bar{p}_2^2 - \tilde{p}^2\}$;$\ldots$.如此进行,直至$\tilde{h}_1(p)$和$\tilde{h}_2(p)$中隶属度的概率信息完全一致.

性质5 对于任意2个标准概率犹豫模糊元,按照定义9中的调节步骤可以找到唯一一对调和概率犹豫模糊元与之保持对应,且调节后的二者的概率信息与基本元素个数保持一致.

例2 设两个标准概率犹豫模糊元分别为$h_1(\bar{p}) = \{0.1(0.2), 0.2(0.5), 0.6(0.3)\}$和$h_2(\bar{p}) = \{0.1(0.6), 0.3(0.4)\}$,二者的调和概率犹豫模糊元分别为$\tilde{h}_1(p) = \{0.1(0.2), 0.2(0.4), 0.2(0.1), 0.6(0.3)\}$和$\tilde{h}_2(p) = \{0.1(0.2), 0.1(0.4), 0.3(0.1), 0.3(0.3)\}$.

显然经过调节后$h_1(\bar{p})$和$h_2(\bar{p})$的元素个数不仅保持一致,概率信息也保持了一致,而且完全无需人为主观添加元素,最大程度地保留了原始信息.

3.2 概率犹豫模糊元的交叉熵和对称交叉熵

交叉熵是测量模糊信息之间差异程度的一种重要工具,在模糊领域得到了广泛的应用[28-30]. 为了测量概率犹豫模糊元之间的差异程度和避免人为添加数据,本文根据犹豫模糊交叉熵测度[23-24]和调和概率犹豫模糊元提出概率犹豫模糊元的交叉熵和对称交叉熵.

定义10 设两个概率犹豫模糊元$h_1(p) = \{\gamma_1^{\lambda}(p_1^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \ldots, l_1\}$和$h_2(p) = \{\gamma_2^{\lambda}(p_2^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \ldots, l_2\}$,二者的调和概率犹豫模糊元分别为$\tilde{h}_1(p) = \{\tilde{\gamma}_1^{\lambda}(\tilde{p}^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \ldots, L\}$和$\tilde{h}_2(p) = \{\tilde{\gamma}_2^{\lambda}(\tilde{p}^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \ldots, L\}$, $I(h_1(p))$和$I(h_2(p))$分别为$h_1(p)$和$h_2(p)$

的信息不完全度,则

$$\mathrm{CE}_1(h_1(p),h_2(p))=\frac{1}{T}\Big(\sum_{\lambda=1}^{L}\tilde{p}^{\lambda}\Big(\frac{(1+q\tilde{\gamma}_1^{\lambda})\ln(1+q\tilde{\gamma}_1^{\lambda})}{2}+\frac{(1+q\tilde{\gamma}_2^{\lambda})\ln(1+q\tilde{\gamma}_2^{\lambda})}{2}-\frac{2+q(\tilde{\gamma}_1^{\lambda}+\tilde{\gamma}_2^{\lambda})}{2}\ln\frac{2+q(\tilde{\gamma}_1^{\lambda}+\tilde{\gamma}_2^{\lambda})}{2}+\frac{(1+q(1-\tilde{\gamma}_1^{\lambda}))\ln(1+q(1-\tilde{\gamma}_1^{\lambda}))}{2}+\frac{(1+q(1-\tilde{\gamma}_2^{\lambda}))\ln(1+q(1-\tilde{\gamma}_2^{\lambda}))}{2}-\frac{2+q(2-\tilde{\gamma}_1^{\lambda}-\tilde{\gamma}_2^{\lambda})}{2}\ln\frac{2+q(2-\tilde{\gamma}_1^{\lambda}-\tilde{\gamma}_2^{\lambda})}{2}\Big)+\frac{(1+qI(h_1(p)))\ln(1+qI(h_1(p)))}{2}+\frac{(1+qI(h_2(p)))\ln(1+qI(h_2(p)))}{2}-\frac{2+q(I(h_1(p))+I(h_2(p))}{2}\ln\frac{2+(I(h_1(p))+I(h_2(p))}{2}\Big).\tag{14}$$

其中$T=\dfrac{3}{2}((1+q)\ln(1+q)-(2+q)(\ln(2+q)-\ln 2))$和$q>0$.

$$\mathrm{CE}_2(h_1(p),h_2(p))=\frac{2}{3(1-2^{1-\alpha})}\Big(\sum_{\lambda=1}^{L}\tilde{p}^{\lambda}\Big(\frac{(\tilde{\gamma}_1^{\lambda})^{\alpha}+(\tilde{\gamma}_2^{\lambda})^{\alpha}}{2}-\Big(\frac{\tilde{\gamma}_1^{\lambda}+\tilde{\gamma}_2^{\lambda}}{2}\Big)^{\alpha}+\frac{(1-\tilde{\gamma}_1^{\lambda})^{\alpha}+(1-\tilde{\gamma}_2^{\lambda})^{\alpha}}{2}-\Big(\frac{2-\tilde{\gamma}_1^{\lambda}-\tilde{\gamma}_2^{\lambda}}{2}\Big)^{\alpha}\Big)+\frac{(I(h_1(p)))^{\alpha}+(I(h_2(p)))^{\alpha}}{2}-\Big(\frac{I(h_1(p))+I(h_2(p))}{2}\Big)^{\alpha}\Big).\tag{15}$$

其中$\alpha>0$.

$$\mathrm{CE}_3(h_1(p),h_2(p))=\frac{1}{R}\Big(\sum_{\lambda=1}^{L}\tilde{p}^{\lambda}\Big(\tilde{\gamma}_1^{\lambda}\ln\frac{\beta\tilde{\gamma}_1^{\lambda}}{(\beta-1)\tilde{\gamma}_1^{\lambda}+\tilde{\gamma}_2^{\lambda}}+(1-\tilde{\gamma}_1^{\lambda})\ln\frac{\beta(1-\tilde{\gamma}_1^{\lambda})}{(\beta-1)(1-\tilde{\gamma}_1^{\lambda})+1-\tilde{\gamma}_2^{\lambda}}\Big)+I(h_1(p))\ln\frac{\beta I(h_1(p))}{(\beta-1)I(h_1(p))+I(h_2(p))}+(1-I(h_1(p)))\ln\frac{\beta(1-I(h_1(p)))}{(\beta-1)(1-I(h_1(p)))+(1-I(h_2(p)))}\Big).\tag{16}$$

其中$\beta>1$和$R=2\ln\beta-2\ln(\beta-1)$均为概率犹豫模糊元$h_1(p)$和$h_2(p)$的交叉熵测度.

上述交叉熵并不满足对称性,为此本文提出概率犹豫模糊元的对称交叉熵和相关性质.

定义11 设两个概率犹豫模糊元分别为$h_1(p)$和$h_2(p)$, $\mathrm{CE}_i(h_1(p),h_2(p))(i=1,2,3)$为它们的交叉熵,称

$$\mathrm{DE}_i(h_1(p),h_2(p))=\frac{1}{2}(\mathrm{CE}_i(h_1(p),h_2(p))+\mathrm{CE}_i(h_2(p),h_1(p)))\tag{17}$$

为$h_1(p)$和$h_2(p)$的对称交叉熵.

性质6 设2个概率犹豫模糊元分别为$h_1(p)$和$h_2(p)$,它们的对称交叉熵$\mathrm{DE}(h_1(p),h_2(p))$满足:

1) $\mathrm{DE}(h_1(p),h_2(p))=0$当且仅当$h_1(p)=h_2(p)$;

2) $\mathrm{DE}(h_1(p),h_2(p))=\mathrm{DE}(h_2(p),h_1(p))$;

3) $0\leqslant\mathrm{DE}(h_1(p),h_2(p))\leqslant 1$;

4) $\mathrm{DE}(h_1(p),h_2(p))=1$当且仅当$h_1(p)=\{1(1)\}$和$h_2(p)=\{0(0)\}$或$h_1(p)=\{0(0)\}$和$h_2(p)=\{1(1)\}$.

证明 1) 函数$f_1(x)=(1+qx)\ln(1+qx)(q>0)$, $f_2(x)=\alpha x^{\alpha-1}(\alpha>1)$和$f_3(x)=-\ln x$在$x\in[0,1]$时均为凹函数,根据凹函数的性质和Jensen不等式易得$\mathrm{CE}_i(h_1(p),h_2(p))\geqslant 0$,且当且仅当$h_1(p)=h_2(p)$时$\mathrm{CE}_i(h_1(p),h_2(p))=0$,所以$\mathrm{DE}_i(h_1(p),h_2(p))=0$当且仅当$h_1(p)=h_2(p)$;由文献[23]和文献[31]易得2)、3)和4)成立. □

下面根据上述3种概率犹豫模糊元的对称交叉熵,提出概率犹豫模糊元的广义对称交叉熵,其基本定义如下.

定义12 设两个概率犹豫模糊元$h_1(p)$和$h_2(p)$, $\mathrm{DE}_i(h_1(p),h_2(p))(i=1,2,3)$为它们的对称交叉熵,称

$$\mathrm{DE}^{\varPhi}(h_1(p),h_2(p))=\varPhi(\mathrm{DE}_1(h_1(p),h_2(p)),\mathrm{DE}_2(h_1(p),h_2(p)),\mathrm{DE}_3(h_1(p),h_2(p)))\tag{18}$$

为$h_1(p)$和$h_2(p)$的广义对称交叉熵.其中函数$\varPhi(x_1,x_2,x_3):[0,1]^3\to[0,1]$满足以下几个条件:

1) $\varPhi(x_1,x_2,x_3)=0$当且仅当$x_1=x_2=x_3=0$;

2) $\varPhi(x_1,x_2,x_3)=1$当且仅当$x_1=x_2=x_3=1$;

3) 当$x_i\in[0,1]$时,$\varPhi$关于x_i单调递增.

很容易证明$\mathrm{DE}^{\varPhi}(h_1(p),h_2(p))$满足性质6.

通过改变$\varPhi(x_1,x_2,x_3)$的表达式可以获得许多类型概率犹豫模糊对称交叉熵,如

$$\mathrm{DE}_1^{\varPhi}(h_1(p),h_2(p))=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{DE}_i(h_1(p),h_2(p)),\tag{19}$$

$$\mathrm{DE}_2^{\varPhi}(h_1(p),h_2(p))=\Big(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{DE}_i(h_1(p),h_2(p))\Big)\times$$

$$\mathrm{e}^{1-(\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\mathrm{DE}_i(h_1(p),h_2(p)))}, \tag{20}$$

$$\mathrm{DE}_3^{\Phi}(h_1(p),h_2(p))=$$
$$1-\cos\Big(\frac{\pi}{6}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{DE}_i(h_1(p),h_2(p))\Big). \tag{21}$$

4　基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策模型

利用上述概率犹豫模糊元的犹豫度、符号距离和交叉熵测度,下面将建立基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策模型.

对某一概率犹豫模糊多属性决策问题,设方案集 $X=\{x_i|i=1,2,\dots,m\}$、属性集 $A=\{a_j|j=1,2,\cdots,n\}$,专家集 $e=\{e_k|k=1,2,\dots,r\}$ 和专家的权重集 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r)^{\mathrm{T}}$,其中专家的权重为完全已知,属性的权重完全未知.

step 1: 要求专家 e_k 根据属性 a_j 对被评价方案 x_i 进行评价,其评价结果用概率犹豫模糊元 $h_{ij}^k(p)$ 进行表达,最终获得决策矩阵 $M^k=(h_{ij}^k(p))_{m\times n}$.

step 2: 基于离差最大化的思想和概率犹豫模糊元的广义对称交叉熵建立以下模型确定属性的权重:

$$\text{(M-1)}\begin{cases}\max\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{v=1}^{m}w_j^k\mathrm{DE}^{\Phi}(h_{ij}^k(p),h_{vj}^k(p));\\ \sum\limits_{j=1}^{n}(w_j^k)^2=1,w_j^k\geqslant 0.\end{cases}$$

为了求解上述模型,首先构造拉格朗日函数

$$L(w_j^k,\lambda)=$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}w_j^k\mathrm{DE}^{\Phi}(h_{ij}^k(p),h_{vj}^k(p))+$$
$$\frac{\lambda}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n}(w_j^k)^2-1\Big). \tag{22}$$

分别求 $L(w_j^k,\lambda)$ 关于 w_j^k 和 λ 的偏导,并令其为0,因此得到以下方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial w_j^k}=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{v=1}^{m}w_j^k\mathrm{DE}^{\Phi}(h_{ij}^k(p),h_{vj}^k(p))+\lambda w_j^k=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum\limits_{j=1}^{n}(w_j^k)^2-1=0.\end{cases}$$

解上述方程组得到

$$w_j'^k=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{v=1}^{m}w_j^k\mathrm{DE}^{\Phi}(h_{ij}^k(p),h_{vj}^k(p))}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{v=1}^{m}w_j^k\mathrm{DE}^{\Phi}(h_{ij}^k(p),h_{vj}^k(p))\Big)^2}}. \tag{23}$$

对 $w_j'^k$ 进行归一化,最终获得决策矩阵 M^k 中的属性权重 a_j^k 为

$$w_j^k=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{v=1}^{m}w_j^k\mathrm{DE}^{\Phi}(h_{ij}^k(p),h_{vj}^k(p))}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{v=1}^{m}w_j^k\mathrm{DE}^{\Phi}(h_{ij}^k(p),h_{vj}^k(p))}. \tag{24}$$

step 3: 根据概率犹豫模糊符号距离和属性的权重 $w^k=(w_1^k,w_2^k,\dots,w_n^k)^{\mathrm{T}}$ 计算在决策矩阵 M^k 下备选方案 x_i 的加权符号距离,即

$$D_s^k(x_i,1(\bar{p}))=\sum_{j=1}^{n}w_j^k d_s(h_{ij}^k(p),1(\bar{p})). \tag{25}$$

然后根据 $D_s^k(x_i,1(\bar{p}))$ 和专家的权重 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_r)^{\mathrm{T}}$ 计算备选方案的总体加权符号距离

$$D_s(x_i,1(\bar{p}))=\sum_{k=1}^{r}\omega_k D_s^k(x_i,1(\bar{p})). \tag{26}$$

一般 $D_s(x_i,1(\bar{p}))$ 越小代表备选方案 x_i 越好.

5　算例分析

为了便于与已有方法进行比较,本文选取Zhang等[12]采用的算例.

5.1　算　例

由于汽车成为长途旅行的主要交通工具,安全性一直是评估汽车的最重要标准之一. 3位专家 $e_i(i=1,2,3)$ 应邀对国内5大品牌(别克 x_1,丰田 x_2,福特 x_3,奥迪 x_4 和特斯拉 x_5)的汽车安全性能进行评估,3位专家的权重集为 $\omega=(0.4,0.4,0.2)^{\mathrm{T}}$. 现根据制动系统 a_1、防抱死制动系统 a_2、车辆稳定系统 a_3、辅助约束系统 a_4 和车身材料 a_5 五个属性进行评估,其评估结果用概率犹豫模糊元的形式表示. 表1、表2和表3分别代表3位专家的评估结果.

5.2　属性权重的确定

由于概率犹豫模糊元的对称交叉熵的计算公式

表1　专家 e_1 的评估矩阵 M^1

e_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	$\{0.6(0.25),0.7(0.5),0.8(0.25)\}$	$\{0.5(0.6),0.6(0.4)\}$	$\{0.6(0.8),0.7(0.2)\}$	$\{0.3(0.4),0.4(0.6)\}$	$\{0.6(0.3),0.7(0.3),0.8(0.4)\}$
x_2	$\{0.5(0.5),0.6(0.5)\}$	$\{0.4(0.3),0.5(0.3),0.6(0.4)\}$	$\{0.5(0.2),0.6(0.3),0.7(0.5)\}$	$\{0.6(0.6),0.7(0.2)\}$	$\{0.7(0.5),0.8(0.5)\}$
x_3	$\{0.8(0.5),0.85(0.3),0.9(0.2)\}$	$\{0.3(0.2),0.4(0.4),0.5(0.4)\}$	$\{0.5(0.2),0.6(0.8)\}$	$\{0.5(0.4),0.6(0.6)\}$	$\{0.6(0.3),0.7(0.7)\}$
x_4	$\{0.8(0.5),0.85(0.3),0.9(0.2)\}$	$\{0.7(0.6),0.8(0.2)\}$	$\{0.6(0.4),0.7(0.3),0.8(0.3)\}$	$\{0.5(0.5),0.6(0.5)\}$	$\{0.7(0.7),0.8(0.3)\}$
x_5	$\{0.65(0.5),0.75(0.5)\}$	$\{0.5(0.5),0.6(0.5)\}$	$\{0.7(0.3),0.8(0.7)\}$	$\{0.5(0.3),0.6(0.3),0.7(0.4)\}$	$\{0.7(0.2),0.8(0.2),0.9(0.4)\}$

表 2　专家 e_2 的评估矩阵 M^2

e_2	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	$\{0.5(0.5), 0.7(0.5)\}$	$\{0.7(0.7), 0.8(0.2), 0.9(0.1)\}$	$\{0.4(0.3), 0.6(0.5)\}$	$\{0.5(0.3), 0.6(0.4), 0.7(0.3)\}$	$\{0.7(0.4), 0.8(0.6)\}$
x_2	$\{0.5(0.4), 0.6(0.6)\}$	$\{0.6(0.7), 0.7(0.3)\}$	$\{0.6(0.3), 0.7(0.4), 0.8(0.3)\}$	$\{0.6(0.5), 0.7(0.5)\}$	$\{0.5(0.7), 0.6(0.2), 0.8(0.1)\}$
x_3	$\{0.5(0.2), 0.6(0.3), 0.7(0.5)\}$	$\{0.7(0.6), 0.8(0.2)\}$	$\{0.3(0.4), 0.5(0.6)\}$	$\{0.6(0.5), 0.7(0.2), 0.8(0.3)\}$	$\{0.6(0.5), 0.7(0.5)\}$
x_4	$\{0.7(0.4), 0.8(0.4)\}$	$\{0.6(0.5), 0.7(0.1), 0.8(0.4)\}$	$\{0.7(0.5), 0.8(0.3), 0.9(0.2)\}$	$\{0.5(0.4), 0.6(0.6)\}$	$\{0.7(0.2), 0.8(0.6)\}$
x_5	$\{0.6(0.5), 0.7(0.4), 0.8(0.1)\}$	$\{0.6(0.4), 0.7(0.6)\}$	$\{0.4(0.5), 0.5(0.5)\}$	$\{0.7(0.4), 0.8(0.4)\}$	$\{0.6(0.2), 0.7(0.4), 0.8(0.4)\}$

表 3　专家 e_3 的评估矩阵 M^3

e_3	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	$\{0.6(0.3), 0.7(0.5), 0.8(0.2)\}$	$\{0.6(0.4), 0.7(0.4)\}$	$\{0.7(0.6), 0.8(0.4)\}$	$\{0.65(0.4), 0.7(0.2), 0.75(0.4)\}$	$\{0.6(0.2), 0.7(0.8)\}$
x_2	$\{0.6(0.5), 0.7(0.3)\}$	$\{0.5(0.3), 0.6(0.4), 0.7(0.3)\}$	$\{0.5(0.3), 0.6(0.7)\}$	$\{0.6(0.8), 0.8(0.2)\}$	$\{0.55(0.4), 0.6(0.3), 0.65(0.3)\}$
x_3	$\{0.5(0.3), 0.6(0.7)\}$	$\{0.5(0.5), 0.7(0.5)\}$	$\{0.6(0.5), 0.7(0.3), 0.8(0.2)\}$	$\{0.6(0.2), 0.7(0.4), 0.8(0.4)\}$	$\{0.7(0.4), 0.8(0.4)\}$
x_4	$\{0.5(0.3), 0.6(0.4), 0.7(0.3)\}$	$\{0.5(0.3), 0.6(0.3), 0.7(0.4)\}$	$\{0.7(0.2), 0.8(0.6)\}$	$\{0.6(0.4), 0.7(0.6)\}$	$\{0.7(0.6), 0.8(0.4)\}$
x_5	$\{0.7(0.5), 0.8(0.5)\}$	$\{0.6(0.6), 0.7(0.4)\}$	$\{0.5(0.2), 0.6(0.4), 0.7(0.4)\}$	$\{0.7(0.8), 0.8(0.2)\}$	$\{0.6(0.3), 0.7(0.7)\}$

有多种选择,本文选取 I_1 作为概率犹豫模糊元的信息不完全度公式;其次,选取 DE_1^{Φ} 作为概率犹豫模糊元的对称交叉熵的计算公式,其中取 $q=\alpha=\beta=2$. 结合模型(M-1)计算决策矩阵 $M^k(k=1,2,3)$ 下属性的权重集,计算结果为

$$w^1=(0.208\,6, 0.217\,9, 0.124\,8, 0.237\,6, 0.211\,1)^{\mathrm{T}},$$
$$w^2=(0.144\,8, 0.188\,5, 0.287\,1, 0.206\,8, 0.172\,8)^{\mathrm{T}},$$
$$w^3=(0.226\,4, 0.208\,5, 0.218\,9, 0.139\,9, 0.206\,3)^{\mathrm{T}}.$$

5.3　备选方案的排序

由于概率犹豫模糊符号距离的计算公式有多种选择,选取 H_1 作为概率犹豫模糊元的数值犹豫度计算公式;其次选取 I_1 作为概率犹豫模糊元的信息不完全度公式;然后选取 TH_1 作为概率犹豫模糊元的总犹豫度计算公式;最后根据式(25)和(26)、专家的权重集 $\omega=(0.4,0.4,0.2)^{\mathrm{T}}$ 和属性的权重集计算各方案的总体加权符号距离,计算结果为

$$D_s(x_1,1(\bar{p}))=0.229\,7, D_s(x_2,1(\bar{p}))=0.228\,1,$$
$$D_s(x_3,1(\bar{p}))=0.237\,8, D_s(x_4,1(\bar{p}))=0.191\,8,$$
$$D_s(x_5,1(\bar{p}))=0.209\,1.$$

得到适宜的排序结果为 $x_4\succ x_5\succ x_2\succ x_1\succ x_3$,最终认定奥迪品牌的车辆安全性能最好.

5.4　敏感性分析

本文选择 DE_1^{Φ} 和 TH_1 分别作为概率犹豫模糊元的对称交叉熵测度和总犹豫度对上述案例进行了决策分析. 虽然计算结果较为客观,但是需决策者事先选定合适的对称交叉熵和总犹豫度. 当这些公式发生改变时,可能会影响最终的决策结果. 下面将选择不同的对称交叉熵和总犹豫度并结合本文模型进行决策分析,对得到的决策结果进行对比分析,计算结果如表4所示. 在情况1和情况2中取 $q=\alpha=\beta=2$.

表4　基于不同的对称交叉熵和总犹豫度的方案排序结果

	对称交叉熵	总犹豫度	$D_s(x_1,1(\bar{p}))$	$D_s(x_2,1(\bar{p}))$	$D_s(x_3,1(\bar{p}))$	$D_s(x_4,1(\bar{p}))$	$D_s(x_5,1(\bar{p}))$	排序结果
情况1	I_2,DE_2^{Φ}	I_2,H_2,TH_2	0.229 5	0.231 1	0.238 9	0.211 1	0.212 4	$x_4\succ x_5\succ x_1\succ x_2\succ x_3$
情况2	I_3,DE_3^{Φ}	I_3,H_3,TH_3	0.286 3	0.283 4	0.299 6	0.240 5	0.262 5	$x_4\succ x_5\succ x_2\succ x_1\succ x_3$

由表4的计算结果可以发现,两种情况下的计算结果均认定 x_4 最好,但二者在 x_1 和 x_2 之间的排序存在差异,其主要原因:两种情况下选取了不同的对称交叉熵和总犹豫度,得到的属性权重和符号距离互不相同,使得决策结果存在差异,因此决策者根据自身偏好采用不同的对称交叉熵和总犹豫度时,利用本文模型得到的决策结果可能会发生变化.

5.5　对比分析

为了说明本文模型的有效性,运用文献[12]提出的概率犹豫模糊加权平均算子(PHFWA),同时利用定义3中的概率犹豫模糊元得分函数进行比较分析,其中文献[12]假设属性的权重集为 $w=(0.2,0.2,0.2,0.2,0.2)^{\mathrm{T}}$. 将以上方法的计算结果与本文的计算结果进行比较,结果如表5所示.

表4　两种方法的结果比较

方法	排序结果
文献[12]	$x_4 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$
本文模型	$x_4 \succ x_5 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_3$

由表5的结果可知,虽然本文模型得到的结果与文献[12]中的结果存在部分差异,但本文模型具有以下优势:

1) 文献[12]没有考虑决策者的心理偏好,而在本文模型中决策者可根据自身偏好选择合适的符号距离和交叉熵进行决策分析,充分考虑了决策者的心理偏好,更加符合决策者的实际经历,因此能够产生更有说服力的结果.

2) 本文模型能够较为客观地确定属性的权重,与文献[12]相比减少了决策者的主观随意性.

3) 采用文献[12]的方法进行计算时步骤复杂且耗时过多,而本文模型的计算过程简单且易于理解.

6 结　论

本文提出了概率犹豫模糊元的3种犹豫度、符号距离和交叉熵测度,并对属性权重完全未知的犹豫模糊多属性决策问题进行了研究. 主要研究结论如下:

1) 基于概率犹豫模糊元的隶属度彼此差异和信息不完整定义了犹豫度,以便合理反映决策者的分歧程度.

2) 基于犹豫度的定义,提出了区分度较高的概率犹豫模糊符号距离. 通过与文献[12]对比,可知概率犹豫模糊符号距离具有区分度明显,决策结果更加合理、可靠的特点.

3) 本文所提出的概率犹豫模糊交叉熵、对称交叉熵和广义交叉熵,有效地度量了概率犹豫模糊元之间的差异程度,而且避免了人为添加数据.

4) 针对概率犹豫模糊环境下的多属性决策问题,本文基于符号距离和交叉熵提出了一种计算方便且考虑决策者偏好的决策模型,通过与文献[12]对比,研究结果表明了该决策模型的有效性.

目前,在概率犹豫模糊符号距离的应用中,主要是基于决策者提供的信息与数据,而决策者的判断可能存在主观性. 因此,为了得到更加客观的决策结果,下一步应考虑对概率犹豫模糊信息进行一致性检验,然后进行适度修正,以便提高决策质量.

参考文献(References)

[1] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]. The 18th IEEE Interational Conference on Fuzzy Systems. Jeju Island, 2009: 1378-1382.

[2] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[3] Liao H C, Xu Z S. A VIKOR-based method for hesitant fuzzy multi-criteria decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2013, 12(4): 373-392.

[4] Xu Z S, Zhang X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(6): 53-64.

[5] Zhang X L, Xu Z S. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 61(2): 48-58.

[6] Zhang Z M. Hesitant fuzzy power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Information Sciences, 2013, 234(10): 150-181.

[7] Wei G W. Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31(7): 176-182.

[8] Jin F F, Ni Z W, Chen H Y. Note on "Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making"[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 96(C): 115-119.

[9] Liao H C, Xu Z S, Zeng X J. Novel correlation coefficients between hesitant fuzzy sets and their application in decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 82(C): 115-127.

[10] Sun G D, Guan X, Yi X, et al. An innovative TOPSIS approach based on hesitant fuzzy correlation coefficient and its applications[J]. Applied Soft Computing, 2018, 68: 249-267.

[11] 朱斌. 基于偏好关系的决策方法研究及应用[D]. 南京: 东南大学经济与管理学院, 2014.
(Zhu B. Decision method for research and application based on preference relation[D]. Nanjing: School of Economics and Management, Southeast University, 2014.)

[12] Zhang S, Xu Z S, He Y. Operations and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making[J]. Information Fusion, 2017, 38: 1-11.

[13] Gao J, Xu Z S, Liao H C. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017(4): 1-18.

[14] Li J, Wang Z X. Multi-attribute decision making based on prioritized operators under probabilistic hesitant fuzzy environments[J]. Soft Computing, 2018: 23(11): 1-16.

[15] Li J, Wang J Q. An extended QUALIFLEX method under probability hesitant fuzzy environment for selecting green

suppliers[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(6): 1-14.

[16] Ding J, Xu Z S, Zhao N. An interactive approach to probabilistic hesitant fuzzy multi-attribute group decision making with incomplete weight information[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 32(3): 2523-2536.

[17] 刘玉敏, 朱峰, 靳琳琳. 基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(4): 861-870.
(Liu Y M, Zhu F, Jin L L. Multi-attribute decision method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 861-870.)

[18] Hao Z N, Xu Z S, Zhao H, et al. Probabilistic dual hesitant fuzzy set and its application in risk evaluation[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 127: 16-28.

[19] Zhang X L, Xu Z S. Hesitant fuzzy QUALIFLEX approach with a signed distance-based comparison method for multiple criteria decision analysis[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(2): 873-884.

[20] Li D, Zeng W, Zhao Y. Note on distance measure of hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2015, 321: 103-115.

[21] 林松, 刘小弟, 朱建军, 等. 基于改进符号距离的权重未知犹豫模糊决策方法[J]. 控制与决策, 2018, 33(1): 186-192.
(Lin S, Liu X D, Zhu J J, et al. Hesitant fuzzy decision making method with unknown weight information based on an improved signed distance[J]. Control and Decision, 2018, 33(1): 186-192.)

[22] 阮传扬. 基于新型符号距离的犹豫模糊多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(3): 620-627.
(Ruan C Y. Hesitant fuzzy decision making method based on a new type signed distance[J]. Control and Decision, 2019, 34(3): 620-627.)

[23] Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multi attribute decision-making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.

[24] 刘小弟, 朱建军, 刘思峰. 基于对称交互熵的犹豫模糊信息相似度及聚类应用[J]. 控制与决策, 2014, 29(10): 1816-1822.
(Liu X D, Zhu J J, Liu S F. Similarity measure of hesitant fuzzy sets based on symmetric cross entropy and its application in clustering analysis[J]. Control and Decision, 2014, 29(10): 1816-1822.)

[25] 汪峰, 毛军军, 祖璇, 等. 犹豫模糊信息下的协相关度与聚类分析[J]. 计算机科学与探索, 2018, 12(5): 828-838.
(Wang F, Mao J J, Zu X, et al. Co-correlation degree under hesitant fuzzy information and clustering analysis[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2018, 12(5): 828-838.)

[26] Chen T Y. A signed-distance-based approach to importance assessment and multi-criteria group decision analysis based on interval type-2 fuzzy set[J]. Knowledge and Information Systems, 2013, 35(1): 193-231.

[27] Wu X L, Liao H C, Xu Z S, et al. Probabilistic linguistic MULTIMOORA: A multi-criteria decision making method based on the probabilistic linguistic expectation function and the improved borda rule[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(6): 3688-3702.

[28] Qi X W, Liang C Y, Zhang J L. Generalized cross-entropy based group decision making with unknown expert and attribute weights under interval-valued intuitionistic fuzzy environment[J]. Computers and Industrial Engineering, 2015, 79: 52-64.

[29] Peng J J, Wang J Q, Wu X H, et al. The fuzzy cross-entropy for intuitionistic hesitant fuzzy sets and their application in multi-criteria decision-making[J]. International Journal of Systems Science, 2015, 46(13): 2335-2350.

[30] 赵萌, 沈鑫圆, 何玉锋, 等. 基于概率语言熵和交叉熵的多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(10): 2679-2689.
(Zhao M, Ren X Y, He Y F, et al. Probabilistic linguistic entropy and cross-entropy measures for multiple criteria decision making[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2018, 38(10): 2679-2689.)

[31] Vlachos I K, Sergiadis G D. Intuitionistic fuzzy information-applications to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(2): 197-206.

作者简介

朱峰 (1994−), 男, 博士生, 从事多属性决策方法、智能优化算法的研究, E-mail: zhufengl1994@163.com;

徐济超 (1958−), 男, 教授, 博士生导师, 从事模糊决策分析、质量工程等研究, E-mail: jichaoxu8233@163.com;

刘玉敏 (1956−), 女, 教授, 博士生导师, 从事决策分析、质量智能监控等研究, E-mail: zzyuminliu@126.com;

孙静静 (1996−), 女, 硕士生, 从事模糊聚类、多属性决策的研究, E-mail: sxsunjingjing@163.com.

(责任编辑: 孙艺红)