

基于事件触发的无人驾驶汽车路径跟随预测控制

张 皓[†], 张洪铭, 王祝萍

(同济大学控制科学与工程系, 上海 201804)

摘 要: 研究存在有界扰动的非线性无人车辆模型的路径跟随问题, 提出一种基于事件触发的模型预测控制算法, 与现有的基于时间周期的模型预测控制算法相比, 可以在保证车辆对参考轨迹跟随准确性的同时减少跟随过程中求解优化问题的计算量, 降低在线实时优化的计算负担. 最后给出无人车运动学模型的仿真结果, 对比所提出的控制算法与传统算法, 验证了其有效性.

关键词: 无人驾驶汽车系统; 事件触发控制; 模型预测控制; 路径跟随

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Event-triggered predictive path following control for unmanned autonomous vehicle

ZHANG Hao[†], ZHANG Hong-ming, WANG Zhu-ping

(Department of Control Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: This paper studies the path following problem of nonlinear unmanned vehicle models with bounded disturbances, and proposes an event-triggered model predictive control algorithm. Compared with the existing model predictive control algorithm based on time period, the proposed algorithm can guarantee the accuracy of following the reference trajectory of the vehicle and reduce the computational complexity of solving optimization problems in the following process, then it can reduce the computational burden of on-line real-time optimization. Finally, the simulation results of the unmanned vehicle kinematics model are given. Through the comparison with the traditional algorithm, the effectiveness of the proposed algorithm is verified.

Keywords: unmanned autonomous vehicle system; event-triggered control; model predictive control; path following

0 引 言

随着无人驾驶汽车产业的不断发展, 相关技术受到越来越多的关注^[1-2]. 无人车辆自主避障等行为的基础要求是沿着规划路径行驶. 由于无人车辆具有复杂的动力学系统、行驶环境动态多变、车载控制单元计算能力有限等特点, 对控制方案有极高的要求, 需要通过智能控制方法保证无人车辆安全准确地跟随期望路径行进. 目前, 针对路径跟随问题已经有许多研究成果. 早期的研究集中于最优预瞄控制理论, 将车辆的横纵向控制解耦, 建立车辆动力学模型, 通过当前车辆状态估计到预瞄点的误差, 计算最优控制转角输入^[3]. 文献[4]基于预瞄误差, 设计了自适应 PD 控制器实现横向跟踪. 文献[5]设计了 LQR 控制器实现跟踪效果. 但是, 这些方法对于车辆行驶中多约束问题不能有效处理.

模型预测控制(model predictive control, MPC)基于滚动优化和反馈校正的思想, 能够处理有约束的优化问题, 并且预测模型可以结合被控对象本身, 无论被控对象是线性模型还是非线性模型, 都可以通过预测实现更精准的控制, 因此被广泛应用于无人驾驶领域. Qian 等^[6]将运动规划解耦为路径规划和速度控制, 使用 MPC 控制器跟踪最优路径. Jiang 等^[7]在模型预测控制的成本函数中加入障碍物信息, 同时解决了控制与避障规划的问题. Yu 等^[8]将模型预测控制应用在轨迹跟踪上, 引入可行区域的概念, 保证无人车的安全运行. 除了车辆轨迹跟踪、规划等, 路径跟随问题也是无人驾驶汽车的一个基本问题, 从 20 世纪 90 年代开始受到关注^[9-10], 模型预测控制也是常用的方法之一. 针对路径跟随问题, 文献[11]利用模型预测算法解决了带有输入和状态约束的非线性模型, 给

收稿日期: 2019-03-18; 修回日期: 2019-07-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773289); 上海市自然科学基金项目(17ZR1445800); 中央高校基本科研业务费专项资金项目.

责任编辑: 周彬.

[†]通讯作者. E-mail: zhang_hao@tongji.edu.cn.

出了基于状态终端的收敛性分析和路径跟随问题的几何特性分析. 文献[12]设计了基于多目标模型预测控制的路径跟随问题研究框架,并给出了两种求解多目标约束的算法.

模型预测控制的主要缺点是在线优化的计算负担. 现有硬件水平很难保证优化问题的求解,事件触发控制在减轻计算负担和通信传输量的作用使其越来越受到重视^[13-14],将事件触发与模型预测控制相结合是一个很好的思路. 与传统的周期采样控制相比,事件触发控制只在既定事件发生时刻进行动作,比如误差超过阈值或者达到了特定时刻. 文献[15]提出了基于状态误差的事件触发机制,通过稳定性分析证明了两次事件触发的间隔是有下界的. 文献[16]将事件触发与模型预控制相结合,设定误差阈值为预测轨迹与实际轨迹的差值,有效减少了优化问题的计算次数. Li等^[17]从一个带有有界扰动的非线性模型出发,给出了对事件触发模型预测控制分析的一般思路,即从可行性与稳定性两方面入手. Long等^[18]将该思路应用到分布式控制中. Sun等^[19]应用事件触发的模型预测控制实现了非完整系统的轨迹跟踪.

根据以上研究,本文以无人驾驶汽车的运动学模型为对象,提出一种带有事件触发机制的模型预测控制算法(event-triggered model predictive control, EMPC),设计一个基于预测值和实际值误差的事件触发机制,并优化了模型预测控制中周期性求解过程,实现了计算量与误差精度之间的平衡,同时实现了车辆状态对于期望参考的快速跟踪,在优化问题中设计状态约束与终端约束,并给出了所提出算法的可行性与稳定性证明. 车辆从起始点出发,可以快速跟随上期路径,前轮转角控制输入保持在固定约束内,与传统MPC方法相比,具有相同的误差精度,同时大大减少了计算量.

1 无人驾驶汽车的路径跟随问题

1.1 无人驾驶汽车的运动学模型

符号说明: $\mathbf{x}(\cdot|t_k)$ 表示 t_k 时刻之后一段时间内的系统状态, $\mathbf{u}(\cdot|t_k)$ 表示 t_k 时刻之后一段时间内的控制输入,范数 $\|\mathbf{x}\|_P = \sqrt{\mathbf{x}^T P \mathbf{x}}$, Γ 表示转置, $\bar{\lambda}(P)$ 和 $\underline{\lambda}(P)$ 分别表示矩阵 P 的最大和最小特征值,上标 $\tilde{\mathbf{x}}$ 表示该向量 \mathbf{x} 是模型预测计算过程中的向量,上标 \mathbf{x}^* 表示该向量 \mathbf{x} 是最优控制输入下的向量,上标 $\hat{\mathbf{x}}$ 表示该向量 \mathbf{x} 是可行控制输入下的向量.

给定无人驾驶车辆的转向运动学模型如图1所示. 其中: XOY 为惯性系, φ 为车辆的航向角, δ 为前轮偏角,前轮中轴位置表示为 (X^f, Y^f) ,后轮中轴位

置表示为 (X^r, Y^r) ,前后轮速度分别为 v^f, v^r ,车辆轴距为 l . 假设前后轴均无横向侧滑,可以得到相应的运动学约束

$$\begin{cases} \dot{X}^f \sin(\varphi + \delta) - \dot{Y}^f \cos(\varphi + \delta) = 0, \\ \dot{X}^r \sin \varphi - \dot{Y}^r \cos \varphi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

后轮速度 v^r 可以表示为

$$v^r = \dot{X}^r \cos \varphi + \dot{Y}^r \sin \varphi. \quad (2)$$

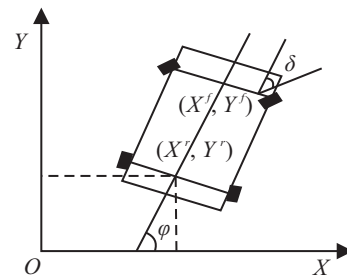


图1 无人驾驶汽车的运动学模型

由式(1)和(2)联立可得车辆在 X, Y 方向上的速度为

$$\begin{cases} \dot{X}^r = v^r \cos \varphi, \\ \dot{Y}^r = v^r \sin \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

前后轮中轴位置与轴距之间的关系为

$$\begin{cases} X^f = X^r + l \cos \varphi, \\ Y^f = Y^r + l \sin \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

将式(3)、(4)代入(1),化简得到车辆的角速度为

$$\dot{\varphi} = \frac{v^r}{l} \tan \delta. \quad (5)$$

选取向量 $\mathbf{x} = [X^r, Y^r, \varphi]^T$ 为状态量, $\mathbf{u} = [v^r, \delta]^T$ 为控制量,由式(3)和(5)整理出车辆的运动学模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \frac{\tan \delta}{l} \end{bmatrix} v^r = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (6)$$

在实际场景中,测量车辆位姿状态的传感器容易受到各种因素的影响,测量结果会引入外界加性干扰,因此将系统(6)完善成一个带有有界扰动的连续时间非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \omega. \quad (7)$$

其中: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为车辆的位姿向量; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入,且满足输入约束 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\omega \in \mathbf{R}^n$ 为有界扰动, $\omega \in \mathcal{W}$ 的上界定义为 $\eta = \sup_{\omega \in \mathcal{W}} \|\omega\|$,集合 \mathcal{U} 和 \mathcal{W} 均为紧集;函数 f 是Lipschitz连续的,Lipschitz常数为 F . 对于系统(7),有如下假设.

假设1^[20] 函数 f 是二阶连续可微的,且有

$f(0, 0) = 0$. 系统(7)是可以线性化的, 线性化后的系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}. \quad (8)$$

其中: $A = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(0,0)}, B = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(0,0)}$.

引理 1^[20] 如果系统(7)满足假设 1 的条件, 则当外界扰动输入 $\boldsymbol{\omega} = 0$ 时, 存在一个反馈增益矩阵 K , 使得状态反馈系统 $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}K)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}'$ 是稳定的. 系统(8)在 $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ 控制下, 对于任意两个对称阵 $Q > 0, R > 0$, 均有正实数 $\varepsilon > 0$ 、对称阵 $P > 0$ 使得 $\Omega(\varepsilon) = \{\mathbf{x}(t) | \forall \mathbf{x}(t), V(\mathbf{x}(t)) = \|\mathbf{x}(t)\|_P^2 \leq \varepsilon^2\}$ 是不变集, 且 $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\|\mathbf{x}(t)\|_{Q+K^T R K}^2$.

1.2 路径跟随问题描述

在无人驾驶车辆的路径跟随问题中, 需要解决的是车辆的位置状态能够跟随上一条参考路径, 参考路径以参数化的形式给出. 首先定义参考路径

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p}(\theta) | \theta \in \Theta\}, \quad (9)$$

其中路径参数 θ 不是先验已知量, 而是用微分方程 $\dot{\theta} = f_\theta(\theta)$ 来描述, θ 中不含有时间参数信息, 参考值需要在每个采样时刻计算. 为便于分析, 根据本文目标 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(\theta)\| = 0$, 将分析对象从车辆的运动学方程改为误差状态方程. 选取 $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(\theta)$ 为新的状态量, 系统(7)被改写为

$$\dot{\mathbf{x}}_e = f(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) + \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{u}_e \in \mathcal{U}_e, \quad (10)$$

其中 \mathcal{U}_e 为紧集. 因此, 本文的主要任务总结为针对系统(7), 需要设计控制器使其位姿状态 $\mathbf{x}(t)$ 能够收敛到参考路径 \mathcal{P} , 同时在整个过程中都保证满足相关约束.

2 基于事件的 MPC 路径跟随控制

2.1 优化问题描述

本文提出一个基于事件的模型预测控制方法, 可以有效解决无人驾驶车辆路径跟随问题. 成本函数设计为

$$\begin{aligned} J(\tilde{\mathbf{x}}_e(s|t_k), \tilde{\mathbf{u}}_e(s|t_k)) = & \int_{t_k}^{t_k+T} (\|\tilde{\mathbf{x}}_e(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}_e(\tau|t_k)\|_R^2) d\tau + \\ & \|\tilde{\mathbf{x}}_e(t_k + T|t_k)\|_P^2. \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $\tilde{\mathbf{x}}_e(s|t_k)$ 和 $\tilde{\mathbf{u}}_e(s|t_k)$ 为预测位姿误差状态和预测控制输入; $\mathbf{x}_e^*(s|t_k)$ 和 $\mathbf{u}_e^*(s|t_k)$ 为最优位姿误差状态和最优控制输入, 是求解优化问题的结果; $\mathbf{x}_e(s)$ 为实际位姿误差状态; t_k 为跟随过程中第 k 次求解优化问题的时刻; 矩阵 Q, R, P 以及常数 ε 的设计遵循引理 1; T 为预测时域; $\xi > 0$ 为常数.

由此给出优化问题的形式如下:

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{u}}_e(s|t_k)} & J(\tilde{\mathbf{x}}_e(s|t_k), \tilde{\mathbf{u}}_e(s|t_k)). \\ \text{s.t.} & \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_e(s|t_k) = f(\tilde{\mathbf{x}}_e(s|t_k), \tilde{\mathbf{u}}_e(s|t_k)), s \in [t_k, t_k + T]; \\ & \mathbf{x}_e(t_k) = \mathbf{x}_e^*(t_k|t_k), \tilde{\mathbf{u}}_e(s|t_k) \in \mathcal{U}_e, \\ & s \in [t_k, t_k + T]; \\ & \|\tilde{\mathbf{x}}_e(s|t_k)\|_P^2 \leq \varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_k}{T}}, s \in [t_k, t_k + T]; \\ & \|\tilde{\mathbf{x}}_e(t_k + T|t_k)\|_P^2 \in \Omega\left(\frac{\xi \varepsilon}{e}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

优化问题(12)的求解结果 $\mathbf{u}_e^*(s|t_k)$ 即为需要的控制器. 与文献[17]的结果相比, 将鲁棒性的状态约束从线性型改进成指数型, 可以加快行驶过程中车辆状态与期望路径间误差的收敛速度.

2.2 事件触发机制

在第 2.1 节的基础上可以得到一个能够解决路径跟随问题的控制器, 但是大量求解优化问题(12)又会带来计算上的负担, 因此引入事件触发机制. 定义序列 $\{t_k | k \in \mathbf{N}^*\}$ 为无人驾驶车辆在路径跟随过程中控制器求解优化问题的时刻, t_{k+1} 由下式得到:

$$t_{k+1} = \min\{t_k + T, t_k + \varrho\}, \quad \varrho > 0, \quad (13)$$

其中 $t_k + \varrho = \inf\{s | \|\mathbf{x}_e^*(s|t_k) - \mathbf{x}_e(s)\|_P = \sigma\}$. 优化问题的求解只发生在以预测时域 T 为周期的固定时刻或者实际状态与最优状态的误差超过一定阈值的情况下. 阈值 $\sigma = \eta \bar{\lambda}(\sqrt{P}) \zeta T e^{F \zeta T}$. 对于两次相邻的触发时刻的间隔, 有以下结论.

定理 1 针对系统(10)和优化问题(12)设计的事件触发机制(13), 两次触发的间隔是有界的, 上界为 T , 下界为 ζT , ζ 为常数且 $\zeta \in (0, 1)$.

证明 根据事件触发机制的设计, 显然有上界为 $t_k + T - t_k = T$. 下面给出下界的证明. 通过误差阈值的定义, 得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_e^*(s|t_k) - \mathbf{x}_e(s)\|_P = & \left\| \int_{t_k}^s f(\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k), \mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)) d\tau + \right. \\ & \left. \mathbf{x}_e^*(t_k|t_k) - \mathbf{x}_e(t_k) - \int_{t_k}^s \eta d\tau - \int_{t_k}^s f(\mathbf{x}_e(\tau), \mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)) d\tau \right\|_P. \end{aligned} \quad (14)$$

t_k 时刻的实际状态与最优状态相同, 且最优状态中不包含外界扰动项, 因此式(14)简化为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_e^*(s|t_k) - \mathbf{x}_e(s)\|_P = & \left\| \int_{t_k}^s f(\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k), \mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)) d\tau - \right. \\ & \left. \int_{t_k}^s f(\mathbf{x}_e(\tau), \mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)) d\tau - \int_{t_k}^s \eta d\tau \right\|_P. \end{aligned} \quad (15)$$

由绝对值三角不等式性质和 Lipschitz 函数的定义, 有

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{x}_e^*(s|t_k) - \mathbf{x}_e(s) \|_P \leq \\ & \left\| \int_{t_k}^s F(\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k) - \mathbf{x}_e(\tau)) d\tau \right\|_P + \eta \bar{\lambda}(\sqrt{P})(s - t_k). \end{aligned} \tag{16}$$

根据 Gronwall-Bellman 不等式, 可以进一步化简积分式, 有

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x}_e^*(s|t_k) - \mathbf{x}_e(s) \|_P & \leq \eta \bar{\lambda}(\sqrt{P})(s - t_k) e^{\int_{t_k}^s F d\tau} = \\ & \eta \bar{\lambda}(\sqrt{P})(s - t_k) e^{F(s-t_k)}, \end{aligned} \tag{17}$$

当 $s = t_k + \varrho$ 时, 令

$$\begin{aligned} \sigma & = \| \mathbf{x}_e^*(t_k + \varrho|t_k) - \mathbf{x}_e(t_k + \varrho) \|_P = \\ & \eta \bar{\lambda}(\sqrt{P}) \zeta T e^{F\zeta T}, \end{aligned}$$

有

$$\varrho \geq \zeta T \Rightarrow t_{k+1} - t_k \geq \varrho \geq \zeta T.$$

因此触发间隔的下界为 ζT . \square

根据上述分析, 将基于事件触发的模型预测控制算法总结如下.

- 1: 离线获得系统参数和初始化条件
- 2: while 未达到仿真时间的最大值
- 3: 系统在 t_k 求解优化问题, 得到 $\mathbf{u}^*(s|t_k)$
- 4: while $s < t_k + T$
- 5: if $\| \mathbf{x}_e^*(s|t_k) - \mathbf{x}_e(s) \|_P < \sigma$
- 6: 应用 $\mathbf{u}^*(s|t_k)$ 作为控制输入
- 7: else
- 8: break
- 9: end if
- 10: end while
- 11: $k = k + 1$
- 12: end while

注1 事件触发机制的引入实际上是在每个计算周期加入一步额外计算, 但是, 事件触发的本质是逻辑判断, 其算法复杂度为 $O(\text{MAX_SIMSTEP})$, MAX_SIMSTEP 是最大仿真步长, 在程序的机器级实现过程中, 可直接使用比较指令操作寄存器中的操作数. 通过事件触发节约的非线性优化问题求解, 不可避免地需要循环结构来实现, 即使在理想情况下, 算法复杂度下界为 $O(\text{MAX_SIMSTEP} * \text{MIN_ITER})$, MIN_ITER 为最小迭代次数, 其下界远大于事件触发机制的复杂度. 因此, 在每个仿真周期引入事件触发机制可以有效节约计算资源.

3 算法分析

3.1 可行性分析

算法的可行性是指存在控制输入, 使系统能够满足状态轨迹的终端进入不变集 $\Omega(\varepsilon)$, 跟随过程中

状态轨迹满足一个鲁棒性的约束 $\| \tilde{\mathbf{x}}_e(s|t_k) \|_P^2 \leq \varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_k}{T}}$, $s \in [t_k, t_k + T]$. 首先构建可行解如下:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_e(s|t_{k+1}) & = \\ & \begin{cases} \mathbf{u}_e^*(s|t_k), & s \in [t_{k+1}, t_k + T]; \\ K \hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1}), & s \in [t_k + T, t_{k+1} + T]. \end{cases} \end{aligned} \tag{18}$$

定理2 系统(10)满足假设1, t_k 时刻求解了优化问题(12). 当 $\sigma = \eta \bar{\lambda}(\sqrt{P}) \zeta T e^{F\zeta T}$ 时, 如果

$$\xi e^{\zeta^{-1}} > 1, \tag{19}$$

$$\eta \leq \frac{(1 - \xi e^{-1}) \varepsilon}{\bar{\lambda}(\sqrt{P}) \zeta T} e^{-FT}, \tag{20}$$

$$e^{-\frac{\lambda(Q)}{\lambda(P)}(t_{k+1} - t_k)} \leq \xi^2, \tag{21}$$

$$\xi e^{-(\zeta+1)} \geq e^{-\frac{\lambda(Q)}{2\lambda(P)}\zeta T}, \tag{22}$$

则存在可行解能够使系统(10)满足优化问题(12)的约束.

证明 证明过程分为两个部分. 首先讨论终端收敛的证明. 当 $s \in [t_{k+1}, t_k + T]$ 时, 分析 $\hat{\mathbf{x}}_e(t_k + T|t_{k+1})$ 与 $\mathbf{x}_e^*(t_k + T|t_k)$ 之间的误差, 有

$$\begin{aligned} & \| \hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1}) - \mathbf{x}_e^*(s|t_k) \|_P = \\ & \left\| \hat{\mathbf{x}}_e(t_{k+1}|t_{k+1}) - \mathbf{x}_e^*(t_k|t_k) + \right. \\ & \left. \int_{t_{k+1}}^s f(\hat{\mathbf{x}}_e(\tau|t_{k+1}), \hat{\mathbf{u}}_e(\tau|t_{k+1})) d\tau - \right. \\ & \left. \int_{t_{k+1}}^s f(\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k), \mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)) d\tau \right\|_P \leq \\ & \sigma + \left\| F \int_{t_{k+1}}^s (\hat{\mathbf{x}}_e(\tau|t_{k+1}) - \mathbf{x}_e^*(\tau|t_k)) d\tau \right\|_P \leq \\ & \sigma e^{F(s-t_{k+1})}. \end{aligned} \tag{23}$$

将 $s = t_k + T$ 代入可得

$$\begin{aligned} & \| \hat{\mathbf{x}}_e(t_k + T|t_{k+1}) - \mathbf{x}_e^*(t_k + T|t_k) \|_P \leq \\ & \sigma e^{F(t_k + T - t_{k+1})}. \end{aligned} \tag{24}$$

对不等式左侧应用绝对值三角不等式并移项, 得到

$$\begin{aligned} & \| \hat{\mathbf{x}}_e(t_k + T|t_{k+1}) \|_P \leq \\ & \| \mathbf{x}_e^*(t_k + T|t_k) \|_P + \sigma e^{F(t_k + T - t_{k+1})} \leq \\ & \varepsilon \xi e^{-1} + (1 - \xi e^{-1}) \varepsilon e^{-F(T-\zeta T)} e^{F(T-\zeta T)} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{25}$$

当 $s \in [t_k + T, t_{k+1} + T]$ 时, 根据引理1, 可以得到 $\| \hat{\mathbf{x}}_e(t_k + T|t_{k+1}) \|_P \leq \varepsilon$, 进一步可以得到

$$V(\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1})) \leq \varepsilon^2 e^{-\frac{\lambda(Q)}{\lambda(P)}(s-t_k-T)}. \tag{26}$$

将 $s = t_{k+1} + T$ 代入, 由条件(21)可得 $V(\hat{\mathbf{x}}_e(t_{k+1} + T|t_{k+1})) \leq \xi^2 \varepsilon^2$. 终端收敛证明完毕.

然后讨论状态轨迹是否满足鲁棒性约束. 当 $s \in [t_{k+1}, t_k + T]$ 时, 在式(23)中应用绝对值三角不等式和约束条件, 移项可得

$$\|\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1})\|_P \leq \varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_k}{T}} + \sigma e^{F(s-t_{k+1})}. \quad (27)$$

为证明 $\|\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1})\|_P \leq \varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_{k+1}}{T}}$, 可以放缩为证明

$$\varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_{k+1}}{T}} \geq \varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_k}{T}} + \sigma e^{F(s-t_{k+1})},$$

即

$$\varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_{k+1}}{T}} - \varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_k}{T}} \geq \sigma e^{F(s-t_{k+1})}.$$

由定理 2 的条件, 不等式右侧上限为 $(1 - \xi e^{-1})\varepsilon$, 当 $s = t_k + T$ 时, 不等式左侧下限为 $\varepsilon \xi e^{-(1-\zeta)} - \varepsilon \xi e^{-1}$. 结合定理 2 中条件 $\xi e^{\zeta-1} > 1$, 原不等式得证.

当 $s \in [t_k + T, t_{k+1} + T]$ 时, 由终端收敛部分中的 $V(\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1})) \leq \varepsilon^2 e^{-\frac{\lambda(Q)}{\lambda(P)}(s-t_k-T)}$ 可得

$$\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1}) \leq \varepsilon e^{-\frac{\lambda(Q)}{2\lambda(P)}(s-t_k-T)}.$$

为了证明 $\|\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1})\|_P \leq \varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_{k+1}}{T}}$, 可以放缩为证明

$$\varepsilon e^{-\frac{\lambda(Q)}{2\lambda(P)}(s-t_k-T)} \leq \varepsilon \xi e^{-\frac{s-t_{k+1}}{T}}.$$

将 $s = t_{k+1} + T$ 代入, 并结合条件 (22) 得到不等式成立. 因此, 在整个跟随过程中, 可行解对应的可行轨迹都满足鲁棒性约束. \square

3.2 稳定性分析

定理 3 在系统 (10) 满足定理 2 的前提下, 如果有

$$\zeta T \varepsilon^2 > \frac{\sigma}{F\lambda(P)}(e^{FT(\zeta-1)} - 1), \quad (28)$$

则状态轨迹可以在有限时间收敛到不变集 $\Omega(\varepsilon)$ 中.

证明 为了表明误差状态轨迹的终端可以收敛, 核心是需要证明成本函数的单调递减性. 考虑将 t_{k+1} 时刻的可行解和 t_k 时刻的最优解代入成本函数中, 相减得到

$$\begin{aligned} & J(\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1}), \hat{\mathbf{u}}_e(s|t_{k+1})) - J(\mathbf{x}_e^*(s|t_k), \mathbf{u}_e^*(s|t_k)) = \\ & \int_{t_k+T}^{t_{k+1}+T} (\|\hat{\mathbf{x}}_e(\tau|t_{k+1})\|_Q^2 + \|\hat{\mathbf{u}}_e(\tau|t_{k+1})\|_R^2) d\tau + \\ & \int_{t_{k+1}}^{t_k+T} (\|\hat{\mathbf{x}}_e(\tau|t_{k+1})\|_Q^2 + \|\hat{\mathbf{u}}_e(\tau|t_{k+1})\|_R^2) d\tau - \\ & \int_{t_{k+1}}^{t_k+T} (\|\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|\mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)\|_R^2) d\tau - \\ & \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\|\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|\mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)\|_R^2) d\tau + \\ & \|\hat{\mathbf{x}}_e(t_{k+1} + T|t_{k+1})\|_P^2 - \|\mathbf{x}_e^*(t_k + T|t_k)\|_P^2. \quad (29) \end{aligned}$$

对于式 (28), 为了使相减后的结果小于 0, 需要对各个部分分别化简. 当 $s \in [t_k + T, t_{k+1} + T]$ 时, 根据可行解的构造, 有 $\|\hat{\mathbf{u}}_e(s|t_{k+1})\|_R^2 = \|\mathbf{u}_e^*(s|t_k)\|_R^2$, 可以抵消. 当 $s \in [t_k + T, t_{k+1} + T]$ 时, 代入可行解 $\hat{\mathbf{u}}_e(s|t_{k+1}) = K\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1})$, 由引理 1 可知

$$\|\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1})\|_{Q+K^T R K} \leq -\dot{V}(\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1})),$$

因此积分过程中这部分是小于 0 的. 由定理 2, 可行解的终端进入 $\Omega\left(\frac{\xi\varepsilon}{e}\right)$, 最优解的终端进入集合 $\Omega(\varepsilon)$, 因此 $\|\hat{\mathbf{x}}_e(t_{k+1} + T|t_{k+1})\|_P^2 - \|\mathbf{x}_e^*(t_k + T|t_k)\|_P^2 \leq 0$, 此时化简结果整理成

$$\begin{aligned} & J(\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1}), \hat{\mathbf{u}}_e(s|t_{k+1})) - J(\mathbf{x}_e^*(s|t_k), \mathbf{u}_e^*(s|t_k)) = \\ & \int_{t_{k+1}}^{t_k+T} (\|\hat{\mathbf{x}}_e(\tau|t_{k+1})\|_Q^2 - \|\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k)\|_Q^2) d\tau - \\ & \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\|\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|\mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)\|_R^2) d\tau. \quad (30) \end{aligned}$$

由绝对值三角不等式和式 (23), 有

$$\begin{aligned} & \int_{t_{k+1}}^{t_k+T} (\|\hat{\mathbf{x}}_e(\tau|t_{k+1})\|_Q^2 - \|\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k)\|_Q^2) d\tau \leq \\ & \int_{t_{k+1}}^{t_k+T} \frac{\lambda(Q)}{\lambda(P)} \sigma e^{F(\tau-t_{k+1})} d\tau \leq \\ & \frac{\lambda(Q)\sigma}{F\lambda(P)} (e^{FT(\zeta-1)} - 1). \quad (31) \end{aligned}$$

另一方面, 又有

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\|\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|\mathbf{u}_e^*(\tau|t_k)\|_R^2) d\tau \geq \\ & \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{x}_e^*(\tau|t_k)\|_Q^2 d\tau \geq \lambda(Q)(t_{k+1} - t_k)\varepsilon^2 \geq \\ & \lambda(Q)\zeta T \varepsilon^2. \quad (32) \end{aligned}$$

根据定理 3 可得

$$\begin{aligned} & J(\hat{\mathbf{x}}_e(s|t_{k+1}), \hat{\mathbf{u}}_e(s|t_{k+1})) - \\ & J(\mathbf{x}_e^*(s|t_k), \mathbf{u}_e^*(s|t_k)) < 0. \end{aligned}$$

在每一个时刻, 代入最优解的成本函数一定小于代入其他可行解的成本函数, 综上可得成本函数的单调递减性成立, 即

$$J(\mathbf{x}_e^*(s|t_{k+1}), \mathbf{u}_e^*(s|t_{k+1})) < J(\mathbf{x}_e^*(s|t_k), \mathbf{u}_e^*(s|t_k)).$$

下面用反证法推导系统能否在有限时间内收敛. 假设有限时间内, 系统的误差状态轨迹无法进入 $\Omega(\varepsilon)$, 依据成本函数的单减性 $J(t_{k+1}) - J(t_k) < -\kappa_k < 0$, 其中 $\kappa_k \in \mathbf{R}^+$, 进而得到 $J(t_\infty) - J(t_0) < -\sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k$, $J(t_\infty) < J(t_0) - \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k < 0$ 与成本函数的非负性矛盾, 原命题的逆命题成立. \square

4 仿真结果

根据第 2 节提出的算法, 分别比较带有事件触发的模型预测控制器与传统的模型预测控制器的结果. 变量单位使用国际单位制, 仿真步长设定为 420, 采样时间为 $T_m = 0.05$ s. 车辆的运动学模型参考第 1.1 节提出的结果. 车辆的初始位姿状态向量为 $[18, 0, 0.5\pi]$, 轴距 $l = 2.85$ m, 后轮速度 $v^r = 6$ m/s. 预测时域 $T = 0.2$ s, 参考轨迹的圆心在 $(X_0, Y_0) = (0, 0)$, 半径 $R = 20$ m. 轨迹参数 $\theta = \arctan \frac{Y_0 - Y}{X_0 - X}$, 进一步得到期望轨迹 $\mathbf{p}(\theta) = [R \cos \theta + X_0, R \sin \theta, \theta +$

$0.5\pi]^T$. 误差阈值 $\sigma = 1.34 \times 10^{-3}$, 扰动 $\eta = 0.00004$, $\zeta = 0.6, \xi = 1.7$, Lipschitz 常数 $F = 1.1, \varepsilon = 0.3$. 权重矩阵 $Q = [10, 0, 0; 0, 10, 0; 0, 0, 100]^T, R = [10], P = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1]^T$.

EMPC 控制器的路径跟随仿真结果如图2所示. 由图2可见, 在求解优化问题时, 最优控制输入下的理想状态与实际状态之间的误差超过了设计阈值 σ , 或者上次求解最优控制序列已经完全应用于被控车辆.

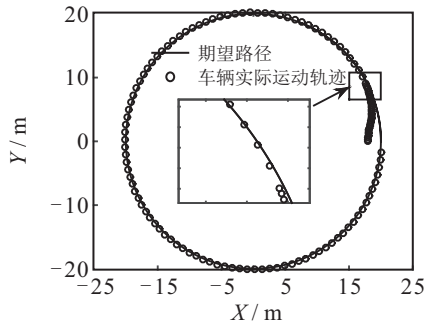


图2 事件触发模型预测控制器

图3的传统模型预测控制器采用文献[21]的结果, 由图2与图3的比较可见, 二者都能实现无人驾驶车辆的运动轨迹快速跟踪期望路径, 但是图2的求解时刻比图3更稀疏, 总体次数远少于传统模型预测控制.

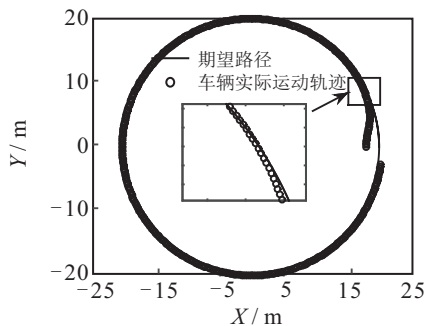


图3 传统模型预测控制器

表1给出两者的优化问题求解次数. 由表1可见, 传统的MPC控制器是时间周期触发, 在每个时间步长都要求解优化问题. EMPC控制器的求解次数与MPC控制器相比, 节省了约30%的计算资源.

表1 平均优化问题计算次数与时间对比

控制方法	EMPC	MPC
平均计算次数	127	420
平均计算时间/s	0.181002	0.256634

图4为控制输入前轮偏角 δ 与状态误差, 实线为EMPC, 虚线为MPC. 由图4可见, 前轮转角控制输入表明本文的控制输入满足输入约束. 由于本文设计的EMPC控制器在优化问题中引入了状态约束, 在状

态误差的收敛性上优于文献[21]的结果.

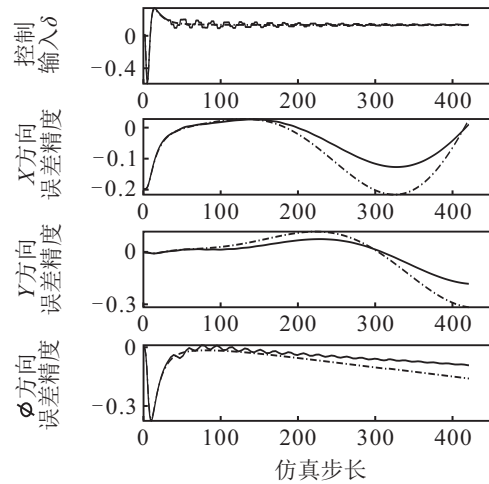


图4 控制输入前轮偏角 δ 与状态误差

图5为两种方法下的状态轨迹, 实线为EMPC, 虚线为MPC, 点线为ref. 由图5可见, 本文方法在大幅节省计算资源的前提下, 控制精度可以达到预期要求, 局部跟踪误差略优于传统MPC控制器, 比传统MPC更适合应用于无人驾驶汽车系统.

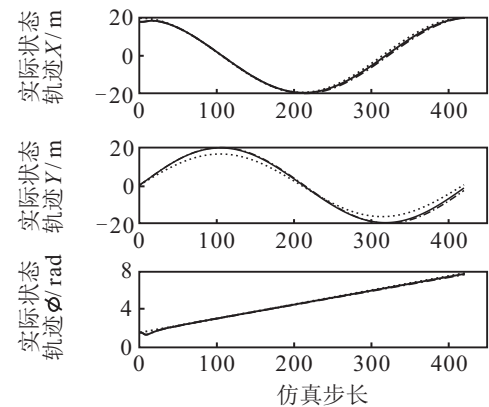


图5 实际状态轨迹

5 结论

本文针对无人驾驶汽车的路径跟随问题设计了带有事件触发机制的模型预测算法, 并对算法的可行性和稳定性作了分析和证明, 给出了可行性和稳定性的充分条件. 针对非线性无人车运动学模型的仿真结果显示, 所提出算法可以满足对参考路径的跟随, 有效减少优化问题的求解次数, 降低计算负担.

参考文献(References)

- [1] 任殿波, 张继业. 基于Lyapunov函数方法的时滞车辆纵向跟随控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(8): 918-926. (Ren D B, Zhang J Y. Lyapunov function approach to longitudinal following control of vehicles in platoon with delays[J]. Control and Decision, 2007, 22(8): 918-926.)
- [2] 张琨, 崔胜民, 王剑锋. 基于自适应RBF网络补偿的智能车辆循迹控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(4): 627-631.

- (Zhang K, Cui S M, Wang J F. Intelligent vehicle's path tracking control based on self-adaptive RBF network compensation[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(4): 627-631.)
- [3] Guo K H, Guan H. Modelling of driver/vehicle directional control system[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1993, 22(3/4): 141-184.
- [4] Chatzikomis C, Spentzas K. A path-following driver model with longitudinal and lateral control of vehicle's motion[J]. *Forschung Im Ingenieurwesen-Engineering Research*, 2009, 73(4): 257-266.
- [5] Taeyoung L, Juyong K, Kyongsu Y, et al. An investigation on the integrated human driver model for closed-loop simulation of intelligent safety systems[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2010, 24(3): 761-767.
- [6] Qian X J, Navarro I, Fortelle A, et al. Motion planning for urban autonomous driving using Bézier curves and MPC[C]. *IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems*. Brazil: IEEE, 2016: 826-833.
- [7] Jiang H J, Wang Z P, Chen Q J, et al. Obstacle avoidance of autonomous vehicles with CQP-based model predictive control[C]. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. Banff: IEEE, 2017: 001668-001673.
- [8] Yu R, Guo H Y, Sun Z P, Chen H. MPC-based regional path tracking controller design for autonomous ground vehicles[C]. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. Budapest: IEEE, 2016: 2510-2515.
- [9] Dahl O, Nielsen L. Torque-limited path following by online trajectory time scaling[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, 6(5): 554-561.
- [10] Slotine J, Yang H S. Improving the efficiency of time-optimal path-following algorithms[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, 5(1): 118-124.
- [11] Faulwasser T, Findeisen R. Nonlinear model predictive control for constrained output path following[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 61(4): 1026-1039.
- [12] Shen C, Shi Y, Buckham B. Path-following control of an AUV: a multiobjective model predictive control approach[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, 27(3): 1334-1342.
- [13] 杨旭升, 张文安, 俞立. 适用于事件触发的分布式随机目标跟踪方法[J]. *自动化学报*, 2017, 43(8): 1393-1401.
- (Yang X S, Zhang W A, Yu L. Distributed tracking method for maneuvering targets with event-triggered mechanism[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(8): 1393-1401.)
- [14] Wen S X, Guo G, Chen B, et al. Event-triggered cooperative control of vehicle platoons in vehicular Ad Hoc networks[J]. *Information Sciences*, 2018, 459: 341-353.
- [15] Tabuada P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [16] Lehmann D, Henriksson E, Johansson K H. Event-triggered model predictive control of discrete-time linear systems subject to disturbances[C]. *European Control Conference*. Zürich: IEEE, 2013: 1156-1161.
- [17] Li H P, Shi Y. Event-triggered robust model predictive control of continuous-time nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2014, 50(5): 1507-1513.
- [18] Long Y S, Liu S, Xie L H. Event-triggered distributed MPC for continuous-time nonlinear systems[C]. *Chinese Control Conference*. Dalian: IEEE, 2017: 4618-4623.
- [19] Sun Z Q, Dai L, Xia Y Q, et al. Event-based model predictive tracking control of nonholonomic systems with coupled input constraint and bounded disturbances[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(2): 608-615.
- [20] Chen H, Allgöwer F. A quasi-infinite horizon nonlinear predictive control scheme with guaranteed stability[J]. *Automatica*, 1997, 34(10): 1205-1217.
- [21] Gong J W, Xu W, Jiang Y, et al. Multi-constrained model predictive control for autonomous ground vehicle trajectory tracking[J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2015, 24(4): 441-448.

作者简介

张皓(1979—), 女, 教授, 博士生导师, 从事复杂网络、网络控制系统、多智能体系统、切换系统等研究, E-mail: zhang_hao@tongji.edu.cn;

张洪铭(1994—), 男, 硕士生, 从事无人驾驶车辆的规划与控制的研究, E-mail: zhang_hongming@tongji.edu.cn;

王祝萍(1973—), 女, 教授, 博士生导师, 从事机器人系统智能控制、无人驾驶车辆和非完整系统控制等研究, E-mail: elewzp@tongji.edu.cn.

(责任编辑: 郑晓蕾)